



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

112

310'

Euclides

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

EUCLIDIS ELEMENTA

EX OPTIMIS LIBRIS

IN USUM TIRONUM

GRAECE EDITA

AB

Ernst
ERNESTO FERDINANDO AUGUST,
GYMNASII REGII JOACHIMICI PROFESSORE.

PARS PRIMA,

QUAE PRIORES NOVE ELEMENTORUM LIBROS CONTINET CUM
QUATUOR APPENDICIBUS ET QUINQUE TABULIS
LITHOGRAPHICIS.

^oBEROLINI, MDCCCXXVI.

IMPENSIS T. TRAUTWEINII.

LONDINI, APUD TREUTTEL ET WÜRZ, TREUTTEL FILIUM ET
RICHTER.

PARISIIS, APUD TREUTTEL ET WÜRZ.

Math 279.1.66 ^{2 vols}

1857 Dec 21

Hansen Fund

Jacob Library 310

P r a e f a t i o.

Augescente in dies numero eorum, qui cum humanissimo antiquitatis studio mathematicarum litterarum institutionem conjungere student, operae pretium facturus esse mihi videbar, si Elementorum Euclidis textum graecum denuo recognitum in usum scholarum edendum curarem. Quae enim hucusque prodierunt integri textus editiones e bibliopolarum officinis aut disparuerunt aut majore veneunt pretio, quam quae ab omnibus harum rerum curiosis comparari possint. Tres enim tantum exstare editiones, quae integrum textum graecum amplectantur, notum est, quarum antiquissima Basileae anno 1533 impressa est, addito Procli commentario in primum Elementorum librum, qui graece nusquam alibi apparuit. Continet haec Basileensis editio nihil nisi textum graecum e duorem codicum comparatione conformatum a Simone Grynaeo, qui sub finem epistolae ad Cuthbertum Constallum Pontificem, praefationis loco operi praefixae, haecce addidit. „Nullis, dum in hoc sum, laboribus perici. Intelligi ex eo potest, quod tam diversis e

„locis exemplaria per amicos partim, partim ipse suscep-
 „cepta perigrinatione conquisivi. Euclidis alterum (nam
 „usi duobus sumus) Lazarus Bayfius Venetiis, alterum
 „Parrhysiis Joann. Ruellius amicis, mihi ipsi Procli
 „commentaria Oxonii Joann. Claymundus candide
 „suppeditabat, viri optimi et humanissimi, literis ju-
 „vandis et exornandis facti, quod ipsorum monumenta
 „docent.“ — Codicis instar habenda esse videtur
 haec editio, cum typographi sphalmata, quae non raro
 occurrunt, ejusmodi sint, ut ubique veram codicum
 lectionem facillima conjectura dijudicare possis.
 Prodiit haec editio ex officina Joan. Hervagii atque
 formae maximae paginas continet 268. — Procli com-
 mentarii seorsum cum scholiis duobus brevissimis 115
 paginas implent. Toti operi hic titulus praescriptus est:
 „Εὐκλείδου στοιχείων βιβλ. ιε· ἐκ τῶν Θέωνος συνου-
 „σιῶν. Εἰς τοῦ αὐτοῦ τὸ πρῶτον ἐξηγημάτων Πρό-
 „κλου βιβλ. δ. Adjecta praefatiuncula, in qua de dis-
 „ciplinis mathematicis nonnihil. Basileae apud Joan.
 „Hervagium anno MDXXXIII. Mense Septembri.“

Multae quidem post illam editiones Euclidis vul-
 gabantur, sed quae aut Bartholomaei Veneti, Zamberti
 Candallae, Federici Commandini, Dasypodii, Clavii
 aliorumque latinas versiones continebant, aut singu-
 lorum tantum librorum graecum textum versionibus
 additum lectoribus offerebant. Fuere quoque, qui in
 Euclide edendo propositiones tantum graece exhibe-
 rent, demonstrationes ipsas in latinum sermonem
 converterent. Sed hi ad unum omnes, si quid graece

addiderant, Hervagiana usi sunt editione, quamobrem textus graeci integritatem spectanti nullius momenti sunt editiones eorum.

At duobus fere seculis interjectis nova operum Euclidis editio Oxoniae prodiit, quae graecum textum cum latino conjunctum codicibusque adhibitis emendatum continebat; cui hic est titulus, „*Εὐκλείδου τὰ Σωζόμενα*. Euclidis quae supersunt „omnia. Ex recensione Davidis Gregorii M. D. „Astronomiae Professoris Savilianae et R. S. S. Oxoniae e theatro Scheldoniano An. Dom. MDCCIII.“ Quae ad hanc editionem perficiendam editoris fuerint adiumenta, ex hisce Praefationis verbis intelligi potest. „Quid porro nos in iis (elementis) edendis praestitimus, paucis explicemus. Primo, Textum graecum quod attinet, ut is quam emendatissimus et castigatissimus prodiret, modis omnibus curavimus; adhibitis, prout opus esset, in consilium „Mss. codicibus haud paucis melioris notae, quos in „hunc ipsissimum usum Academiae pridem legarat „magnus Savilius; ut et Castigationibus ejus propria „manu adscriptis ad marginem editionis Hervagianae. „Accessit singularis et nunquam satis praedicanda „amicissimi D. Joannis Hudsoni S. T. P. Protobibliothecarii Bodleiani industria in expoliendis Graecis hisce et quidem universa editione a vitis etiam „typographicis liberanda. Nempe in omnes etiam „infimas operis nostri partes se demisit vir optimus. „Textum Hervagianum, ante paulo quam in typographorum manus traderetur, accurate interpungen-

„dum et distinguendum curavit. Latina cum Grae-
„cis per totum in Elementis praesertim ac Datibus
„summa fide contulit. Ubi ea a se invicem discre-
„pantia deprehenderentur, vel etiam Graecum ipsum
„suspectum haberetur, consulti illico Mss. codices, quo-
„rum lectio, si cum Latinis congrueret, ad marginem
„adscripta exstabat; sin minus, apposita stellula, ut
„exinde judicandi occasio mihi daretur, utra demum
„lectio Geometricis rationibus magis conveniret. De-
„nique quo textus puritati melius consuleretur, etiam
„schedas singulas, mox ut eas a prelo madentes ex-
„ceperat, semel atque iterum legere et accurate re-
„censere haud gravatus est; eandemque plane in Eu-
„clidis nostri, quam in aliorum auctorum Graecorum
„monumentis a se summa cum laude evulgatis prae-
„stitit diligentiam.“

Atque revera tanta cura haec editio instituta est,
ut digna esset, qua per totum seculum matheseos
studiosi nec graeci sermonis imperiti uterentur.

Cum haec autem in bibliopolarum officinis ra-
rior esse coepisset, nuper Peyrardi viri doctissimi ac
de Graecorum Mathematicorum cognitione propaganda
inter Gallos meritissimi opera atque industria factum
est, ut Elementa et Data Euclidis denno cum codicibus
collata graece in lucem prodirent, latina et gallica
versione addita. Cujus operis titulus hicce est: „Les
„oeuvres D'Euclide, en Grec, en latin et en français
„D'après un manuscrit très ancien, qui était resté
„inconnu jusqu'à nos jours par F. Peyrard, Traduc-

„teur des oeuvres d'Archimède, ouvrage approuvé
„par l'institut de France. Dedié au Roi, Tome pre-
„mier a Paris 1814 (continet Elem. Lib. I — VII. 518 pag.
„formae quadratae). Tome second à Paris 1816 (continet
„Elem. Lib. VIII — X. 518 pag.) Tome troisième à Paris
„1818 (continet Elem. lib. XI — XIII. Data. Hypsiclisque duo libros
616 pag.) „Chèz M. Patris imprimeur-libraire, rue de
„la Colombe en la cité no. 4.

Quam textas graeci edendi curam quaeque auxi-
lia habuerit vir doctissimus, ipsum in praefatione (p.
XII.) disserentem audiamus.

„Mea versio operum Archimedis vulgata est anno
„1808, quò quidem tempore vertendis Euclidis ope-
„ribus ultimam manum admovebam. Sed antequam
„prelo subjiceretur, consulere volui codices manu-
„scriptos bibliothecae imperialis de plurimis locis,
„qui mihi videbantur mutilati vel corrupti in editione
„Oxoniae, qua usus fueram in convertendo Euclide.
„Hi codices, tres et viginti numero, mihi commissi
„fuerunt et statim animadverti, editionem Oxoniae nul-
„lius horum manuscriptorum esse exemplar; hos
„omnes manuscriptos explere lacunas et restituere
„locos corruptos in editione Basiliensi et in editione
„Oxoniae, quae nihil aliud est, quam ejus exemplar.
„Quin etiam animadverti, hos omnes manuscriptos,
„manuscripto 190 tantum excepto, inter se esse ferme
„consentaneos; manuscriptum autem 190 explere la-
„cunas, restituere locos corruptos, qui ope aliorum
„manuscriptorum nec explebantur nec restituebantur.“

„Manuscriptus 190 ad bibliothecam Vaticanam
„pertinebat: is Roma Luletiam a comite de Peluse
„fuit missus.

„In manuscripto graeco 2348, sub finem saeculi
„decimi sexti exarato, quique continet Euclidis data
„cum quinque antiquissimis Vaticanis manuscriptis
„graecis collata a Iesepho Auria, celebri Geometra, nec
„unam quidem reperias e pretiosissimis lectionibus ma-
„nuscripti 190 variantibus; quod probare videtur, hunc
„manuscriptum tunc temporis in bibliotheca Vaticana
„fuisse desideratum etc.

„Hoc manuscripto 190 mihi commisso, statim in
„animum incidit edere graece latine et gallice Elementa
„et Data, sola procul dubio, quae supersint Euclidis
„opera. Quapropter contuli manuscriptum 190 cum
„editione Oxoniae exaravique lectiones variantes in
„margine operis impressi.

„His perlectis ad variantes lectiones margini appo-
„sitas sedulus attendi et aliis manuscriptis accersitis, hanc
„aut illam lectionem variantem in editionem Parisiensem
„admisi, vel ab ea rejeci. Manuscriptum 190 portionem
„habui, quotiescunque nulla mihi fuit ratio, cur hanc aut
„illam lectionem praeferrem. Textum graecum sic con-
„stitutum in latinum converti et quaecunque ex vari-
„antibus, quas admiseram, lectionibus mutari fuit op-
„portunum, haec in versione gallica mutata sunt.

„Mea latina versio ad verbum textui graeco con-
„gruit, nisi quid peculiare me coëgerit, ut secus fa-
„cerem. Nonnulli in mea versione occurrent forte

„Hellenismi aut saltem quaedam locutiones a quibus
„lingua latina abhorreere videtur. Illas quidem vitare
„potuissem; sed mea versio cum textu graeco minus
„fuisset consentanea etc.

„Summa (pag. XVI.) diligentia usus sum, ut
„mea editio quam maxime emendata esset; specimina
„a me praelecta, lecta fuerunt deinde a D. Jan-
„net necnon a D. Patris, mei operis editore, rursus-
„que a me relecta. In nullo specimine prius sub-
„scripsi prelo subjiciatur, quam illud mendis om-
„nibus fuisset expurgatum. . . . D. Nicolopoulo,
„Smyrnaeus, vir eximia doctrina commendabilis et
„diligentissimus emendator, sponte sua legit plurima
„specimina. D. Patris, qui linguam graecam latinam
„et gallicam diu excoluit, summa cura et diligentia
„usus est, ut mea editio prelis gallicis honori esset;
„in speciminibus legendis versionem latinam et gal-
„licam cum textu graeco perattente comparabat et
„margini notationes apponebat etc. . . .

„Dixi, (p. XXVIII.) in bibliotheca imperiali adesse ma-
„nuscriptos graecos tres et viginti. Eorum manuscrip-
„torum secundum vetustatis ordinem hic est index:

„No. 190. Is manuscriptus prae se fert omnia
„indicia manuscriptorum sub finem noni saeculi exara-
„torum. Data proxime sequuntur librum 13. Liber 14
„et liber 15 post Data collocati sunt; quod in nullo con-
„tigit alio manuscripto. In mea editione eundem ordi-
„nem sum secutus, ipsomet D. Lagrange suadente.

„No. 1038. Is manuscriptus, in quo deest initium

„elementorum usque ad propositionem octavam secundi
„libri, ineunte undecimo saeculo exaratus videtur. Is
„manuscriptus, in quo deprehenduntur reliqua Ele-
„menta et Data, Roma Parisios fuit missus (una cum an-
„tecedente) a Comite de Peluse.

„No. 2466. Is manuscriptus, in quo deprehen-
„duntur tredecim libri elementorum, duodecimo
„saeculo exaratus videtur.

„No. 2344. Is manuscriptus, in quo tantum de-
„prehenduntur tredecim priores libri Elementorum,
„saeculo duodecimo exaratus videtur.

„No. 2345. Is manuscriptus, in quo tantum de-
„prehenduntur tredecim priores libri Elementorum,
„saeculo decimo tertio exaratus videtur.

„Omnes ii manuscripti sunt membranacei; sub-
„sequentes sunt cartacei:

„No. 3373. Is manuscriptus, in quo deprehendi-
„tur Euclidis Geometria cum Scholiis, saeculo decimo
„quarto exaratus videtur.

„No. 2342. Is manuscriptus, in quo deest initium
„usque ad propositionem 23 libri primi et in quo de-
„prehenduntur quindecim libri Elementorum et Data,
„saeculo decimo quarto exaratus videtur.

„No. 2762. Is codex, in quo tantum deprehen-
„duntur octo priores libri Elementorum, sub finem
„saeculi decimi quinti exaratus videtur.

„No. 2346. Is codex, in quo tantum deprehen-
„duntur tredecim priores libri Elementorum, saeculo
„decimo quinto exaratus videtur.

„No. 2481. Is codex, in quo tantum deprehen-
duntur decem priores libri Elementorum, saeculo de-
cimo quinto exaratus videtur.

„No. 2531. Is codex in quo tantum deprehen-
duntur tredecim priores libri Elementorum, saeculo
decimo quinto exaratus videtur.

„No. 2343. Is codex, in quo deprehenduntur
quindecim libri Elementorum saeculo decimo sexto
exaratus videtur.

„No. 2547. Is codex, in quo tantum deprehen-
duntur tredecim priores libri Elementorum et Data,
ineunte saeculo decimo sexto exaratus videtur.

„No. 2448. Is codex, in quo Data deprehendun-
tur, saeculo decimo quarto exaratus videtur.

„No. 2352. Is codex, in quo Data deprehendun-
tur, a. J. Rossi fuit exaratus anno 1488.

„No. 2363. Is codex, in quo Data deprehendun-
tur, saeculo decimo quinto exaratus videtur.

„No. 2349. Is codex, in quo Data deprehendun-
tur, saeculo decimo sexto exaratus videtur.

„No. 2350. Is codex, in quo Data deprehendun-
tur, saeculo decimo sexto exaratus videtur.

„No. 1981. Is codex, in quo Data deprehendun-
tur, saeculo decimo sexto exaratus videtur.

„No. 2467. Is codex, in quo Data deprehendun-
tur, saeculo decimo sexto exaratus videtur.

„No. 2472. Is codex, in quo Data deprehendun-
tur, saeculo decimo sexto exaratus videtur, sub finem
nonnulla desiderantur.

No. 3366. Is codex, in quo Data deprehenduntur, saeculo decimo sexto exaratus videtur.

„No. 2348. Is codex comprehendit Euclidis „Data, collata cum quinque antiquissimis manuscriptis bibliothecae Vaticanae a Josepho Auria Neapolitano, celebri Geometra saeculi decimi sexti decedentis.“

Si cui in exscribendis horum eruditissimorum virorum praefationibus longior fuisse videar, hoc eo consilio a me factum esse intelligat, ut circumspicere possint lectores, quemadmodum usque ad nostra tempora codicibus Euclidis, quorum permagnus est numerus, usi sint Elementorum editores. Nulla enim praeterea exstat elementorum graecorum editio integra, et in singulis libris edendis nemo versatus est, quin, omissa codicum cura, in una alterave illarum describenda acquieverit. Quum igitur textum graecum in scholarum usum jam ab hinc annis quatuor edere statuissem, illas tres editiones accuratissime inter se comparavi, varietates scripturae adnotavi, textum omnibus locis ita adornavi, ut nullam Geometra detegat mendam, nulla Graecae linguae peritus sermonis discrepantia offendatur. Non neglexi locupletissimum Procli commentarium, qui multa exhibet a nostrorum codicum scriptura diversa, quae praeferenda mihi videbantur. Nullo autem loco textum vulgatarum editionum immutavi, nisi Proclo meliora offerente Euclideque digniora. Cum autem dif-

ficile non sit ad iudicandum, quae Proclus in suo Elementorum exemplari scripta invenerit quaeque ipse explicandi causa addiderit, id potissimum faciendum esse putavi, ut nihil novi reciperem, quin Euclidis esse ex ipsis Procli verbis pateret.

Hac operis parte finita, summa amplissimi Senatus res ecclesiasticas et scholasticas in civitate nostra auspiciatissime moderantis cura ac benevolentia contigit, ut tres codices e bibliotheca Monacensi mihi committerentur, quorum qui antiquissimus est cum nonnulla alia philosophica et mathematica scripta tum multa continet, quae ad Euclidem pertinent: Phaenomena, Optica, Data, Catoptrica. De quo libro manuscripto apud Hardtium in Descriptione Manuscriptorum graec. Augusta Vindelic. in bibliothecam Reg. Monacens. translatorum haec legimus:

„Codex 361. Bombicinus et Chartaceus, titulis „et initialibus miniatis in carta spissiore, in folio, literis minutissimis et nitidissimis cum scholiis marginalibus diversa manu. Saec XIII. XIV. XV. in „foliis 136, male conservatus, oris laceris etc. et in „scriptus Chartae mathematicae.“

Quae huius codicis partes Euclidis opuscula continent, bombicinae sunt et antiquissimae totius voluminis. Multas inveni lectiones a vulgatis editionibus diversas, quibus Datorum, Phaenomenorumque etc. textus nonnullis locis emendari posse videtur. Quamobrem hunc codicem diligentissime comparavi, scripturae varietates annotavi, scholia marginalia exscripsi, usus aliquando

iis, quae sic praeparaveram, in maiorem Euclidis operum omnium editionem.

Alterum codicem No. 76. Cartaceum Euclidis Data et Phaenomena cum scholiis marginalibus continentem multo recentiore et ex illo prorsus exscriptum esse, primo aspectu animadverti, cum lacunas habeat, ubi ob cartam vel corrosam vel laceram in illo exemplari textus legi non potest.

Tertius Codex No. 102. recentiore quidem tempore conscriptus esse videtur, sed praeter multa philosophica Jamblichi aliorumque scripta scholia continet graeca ad Elementorum Euclidis libros tredecim omnes, excepto quarto, quae nusquam impressa sunt, nisi quod maxima ex parte latinis scholiis, quae Clavius operi suo addidit, materiem praebuere.

Excerpta sunt haec scholia de margine codicis cujusdam Elementorum Euclidis, cujus rei asterisci aliaque scriptorum signa, quibus textus loci indicari solent lectoribus, certissimum sunt indicium.

Descripseri omnia haec scholia eo consilio, ut in commentario de Elementis aliquando conscribendo adjumento mihi essent.

Sic praeparatus hanc graeci textus editionem suscepi, in qua multa, quae priorum editorum visum effugisse videntur, emendata reperi. Continet tomus primus priores novem elementorum libros. Adjecti sunt quatuor appendices in usum tironum conscripti, quorum primus illas demonstrationes alteras continet, quae passim in singulis libris occurrunt, quasque,

quæ Euclidis esse non videntur, a ceteris sejuncti. In secundo appendice locum aliquem ex Proclo protuli, in quo clari mathematici qui ante Euclidem vixerunt, enumerantur ac de vita Euclidis ipsius pauca narrantur. Tertius Appendix ea continet, quæ de vita et scriptis Euclidis memoriae tradita sunt. In quarto denique appendice de elementis Euclidis fusiùs disserui. Formae sive figurae ad demonstrationes illustrandas necessariae in singulis tabulis ita delineatae sunt, ut mathematices perito conspectum theorematum problematumque omnium exhibeant, neque liber ipse evolvendus sit ei, qui, quo loco Euclides singula demonstraverit, in memoriam sibi revocare voluerit; quippe congruos reperies et propositionum et figurarum numeros. Ubi autem diversae exstant demonstrationes, literarum signa minora punctorumque series pro lineis adhibens diversitatem indicare studui.

Tomus secundus, qui intra anni spatium prodibit, ceteros Elementorum Euclidis libros amplectetur Hypsilisque additamenta vulgo tredecim elementorum libris adjecta. Addam huic altero tomo usitatissimorum mathematicorum verborum explicationes ordine alphabetico conscriptas, ut, qui apud Euclidem et Proclum occurrunt termini mathematici, facilius a tironibus intelligi possint. Ita enim nostris temporibus linguae graecae studium vigere video, ut superfluum videatur versionem latinam graeco textui addere; praesertim cum in rebus mathematicis

lingua graeca intellectu facilius sit, quam latina. Continebit etiam tomus alter omnes scripturae varietates, quae gravioris momenti sunt. His duobus tomis absolutis Commentarium ad Elementa editurus sum, criticum et historicum, varias lectiones omnium editionum, diligentissime collatas, scholia graeca adnotationesque continentem ex antiquis recentioribusque scriptoribus ad singula elementa explicanda congestas. Sed jam tempus est, ut futura Deo propitio, praesentia lectori benevolo commendem.

Scripsi Berolini. Cal. Octobr. MDCCCXXVI.

E. F. August.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

~~~~~

Ὅροι.

- α. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν. 1.
- β. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές. 2.
- γ. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα. 3.
- δ. Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. 4.
- ε. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστίν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. 5.
- ς. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί. 6.
- ζ. Ἐπίπεδος ἐπιφανεία ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται. 7.
- η. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστίν, ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, ἢ πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. 8.
- θ. Ὅταν δὲ αἱ τὴν γωνίαν περιέχουσιν γραμμαὶ εὐθεῖαι ᾧσιν, εὐθύγραμμος ἡ γωνία καλεῖται. 9.
- ι. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἡ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν. 10.
- ια. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστίν ἡ μείζων ὀρθῆς. 11.
- ιβ. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς. 12.
- ιγ. Ὅρος ἐστίν, ὃ τινός ἐστι πέρας. 13.
- ιδ. Σχημὰ ἐστι τὸ ὑπὸ τινὸς ἢ τινῶν ὅρων περιεχόμενον. 14.



15. **14.** Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἢ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀρ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.
16. **15.** Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.
17. **16.** Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· (ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.)
18. **17.** Ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς τοῦ κύκλου περιφερείας,
19. **18.** Κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν. (Vulgo Τμήμα κύκλου etc. conf. def. 6. Lib. III. p. 65)
20. **19.** Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπ' εὐθειῶν γραμμῶν περιεχόμενα.
21. **20.** Τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν.
22. **21.** Τετραπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων.
23. **22.** Πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλείονων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.
24. **23.** Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.
25. **24.** Ἰσοσκελὲς δὲ τὸ δύο μόνον ἴσας ἔχον πλευράς.
26. **25.** Σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.
27. **26.** Ἐτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ μίαν ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.
28. **27.** Ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ μίαν ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.
29. **28.** Ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.
30. **29.** Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μὲν ἐστίν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον.
31. **30.** Ἐτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

λβ. Ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθο- 32.  
γώνιον δέ.

λγ. Ῥομβοειδές δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς 33.  
τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν  
ἐστὶν οὔτε ὀρθογώνιον.

λδ. Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια 34  
καλεῖσθω.

λε. Παράλληλοι εὐθεῖαι εἰσιν, αἵτινες ἐν τῷ 35  
αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ'  
ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

### Αἰτήματα.

α. Ἡτῆσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον 1.  
εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχές 2.  
ἐκ εὐθείας ἐκβαλεῖν.

γ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον 3.  
γράψαι.

δ. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. 4

ε. Καὶ, ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς 5.  
ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας  
ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐκ ἄπειρον συμπί-  
πτειν ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

ς. Καὶ δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχουσιν. 6.

### Κοινὰ ἐννοιαί.

α. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. 1.

β. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. 2.

γ. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ κατα- 3.  
λειπόμενά ἐστὶν ἴσα.

δ. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν 4  
ἀνισα.

ε. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ 5.  
ἐστὶν ἀνισα.

- ε. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 16.  
 ς. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 7.  
 η. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 8.  
 θ. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστιν. 9.

### Πρότασις α.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. 1.

Ἐκθεσις. Ἐστώ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη Fig. 1. ἡ  $AB$ .

Προσδιορισμός. Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς  $AB$  εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κατασκευή. Κέντρῳ μὲν τῷ  $A$  διαστήματι δὲ τῷ  $AB$  κύκλος γεγράφθω ὁ  $BΓΔ$ , καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ  $B$  διαστήματι δὲ τῷ  $BA$  κύκλος γεγράφθω ὁ  $ΑΓΕ$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $Γ$  σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ  $A B$  σημεία ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ  $ΓΑ ΓΒ$ .

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ  $A$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $BΓΔ$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $AB$ . πάλιν, ἐπεὶ τὸ  $B$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ΑΓΕ$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $ΒΓ$  τῇ  $BA$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ  $ΓΑ$  τῇ  $AB$  ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν  $ΓΑ ΓΒ$  τῇ  $AB$  ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ  $ΓΑ$  ἄρα τῇ  $ΓΒ$  ἴση ἐστὶν· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ  $ΓΑ AB ΒΓ$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Συμπέρασμα τὸ πρῶτον. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς  $AB$ .

Συμπέρασμα τὸ καθόλου. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

## Πρότασις β.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ 2.  
εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ  $A$ , ἡ δὲ δοθεῖσα Fig. 2.  
εὐθεῖα ἡ  $BΓ$ . δεῖ δὴ πρὸς τῷ  $A$  σημείῳ τῇ δοθείσῃ  
εὐθεῖα τῇ  $BΓ$  ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ  $A$  σημείου ἐπὶ τὸ  $B$   
σημεῖον εὐθεῖα ἡ  $AB$ , καὶ συνεστήτω ἐπ' αὐτῆς τρί-  
γωνον ἰσόπλευρον τὸ  $ΔAB$ , καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ'  
εὐθείας ταῖς  $ΔA$   $ΔB$  εὐθεῖαι αἱ  $AE$   $BZ$ , καὶ κέντρῳ  
μὲν τῷ  $B$  διαστήματι δὲ τῷ  $BΓ$  κύκλος γεγράφθω  
ὁ  $ΓΗΘ$ , καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ  $Δ$  καὶ διαστήματι τῷ  
 $ΔH$  κύκλος γεγράφθω ὁ  $ΗΚΛ$ .

Ἐπεὶ οὖν τὸ  $B$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ΓΗΘ$   
κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $BΓ$  τῇ  $BH$ . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ  $Δ$   
σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ΗΚΛ$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  
 $ΔA$  τῇ  $ΔH$ , ὥν ἡ  $ΔA$  τῇ  $ΔB$  ἴση ἐστὶ λοιπὴ ἄρα ἡ  
 $ΔH$  λοιπὴ τῇ  $BH$  ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ  $BΓ$   
τῇ  $BH$  ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν  $ΔA$   $BΓ$  τῇ  $BH$  ἐστὶν  
ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα καὶ  
ἡ  $ΔA$  ἄρα τῇ  $BΓ$  ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ  $A$  τῇ δοθείσῃ  
εὐθείᾳ τῇ  $BΓ$  ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ  $ΔA$ . ὕπερ ἔδει  
ποῆσαι.

## Πρότασις γ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς 3.  
μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ αἱ  $AB$  Fig. 3.  
 $F$ , ὥν μείζων ἔστω ἡ  $AB$ . δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος  
τῆς  $AB$  τῇ ἐλάσσονι τῇ  $F$  ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Καίεσθω πρὸς τῷ  $A$  σημείῳ τῇ  $F$  εὐθείᾳ ἴση ἡ  
 $AA$ . καὶ κέντρῳ μὲν τῷ  $A$  διαστήματι δὲ τῷ  $AA$   
κύκλος γεγράφθω ὁ  $ΔEZ$ .

Καὶ ἐπεὶ τὸ  $A$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $\Delta EZ$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $AE$  τῇ  $AD$ · ἀλλὰ καὶ ἡ  $\Gamma$  τῇ  $AD$  ἐστὶν ἴση. Ἐκατέρα ἄρα τῶν  $AE$   $\Gamma$  τῇ  $AD$  ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ  $AE$  τῇ  $\Gamma$  ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν  $AB$   $\Gamma$ , ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς  $AB$  τῇ ἐλάσσονι τῇ  $\Gamma$  ἴση ἀφίηται ἡ  $AE$ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### Πρότασις δ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς 4.  
δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα,  
καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ  
τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν  
βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον  
τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι  
ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα  
ἑκατέρα, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτεί-  
νουνσιν.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $AB\Gamma$   $\Delta EZ$ , τὰς δύο πλευ- Fig. 4.  
ρὰς τὰς  $AB$   $AG$  ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς  $AE$   $AZ$   
ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν  $AB$  τῇ  $AE$ ,  
τὴν δὲ  $AG$  τῇ  $AZ$ , καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ  $BAG$  γωνίᾳ  
τῇ ὑπὸ  $EAZ$  ἴσην· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ  $B\Gamma$  βάσει  
τῇ  $EZ$  ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $\Delta EZ$   
τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοι-  
παῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' ἂς  
αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ  $AB\Gamma$  τῇ  
ὑπὸ  $\Delta EZ$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $AGB$  τῇ ὑπὸ  $AZE$ .

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου ἐπὶ τὸ  
 $\Delta EZ$  τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν  $A$  σημείου ἐπὶ  
τὸ  $\Delta$  σημεῖον, τῆς δὲ  $AB$  εὐθείας ἐπὶ τὴν  $AE$ , ἐφαρ-  
μόσει καὶ τὸ  $B$  σημεῖον ἐπὶ τὸ  $E$ , διὰ τὸ ἴσην εἶναι  
τὴν  $AB$  τῇ  $AE$ · ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς  $AB$  ἐπὶ τὴν  
 $AE$  ἐφαρμόσει καὶ ἡ  $AG$  εὐθεῖα ἐπὶ τὴν  $AZ$ , διὰ τὸ

ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνίαν τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$  ὥστε καὶ τὸ  $Γ$  σημεῖον ἐπὶ τὸ  $Ζ$  σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν  $ΑΓ$  τῇ  $ΔΖ$ . Ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ  $Β$  ἐπὶ τὸ  $Ε$  ἐφαρμόσει ὥστε βάσις ἡ  $ΒΓ$  ἐπὶ βάσιν τὴν  $ΕΖ$  ἐφαρμόσει. Ἐἰ γὰρ, τοῦ μὲν  $Β$  ἐπὶ τὸ  $Ε$  ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ  $Γ$  ἐπὶ τὸ  $Ζ$ , ἡ  $ΒΓ$  βάσις ἐπὶ τὴν  $ΕΖ$  οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ἐφαρμόσει ἄρα ἡ  $ΒΓ$  βάσις ἐπὶ τὴν  $ΕΖ$ , καὶ ἴση ἀντὶ τῆς ἔσται ὥστε καὶ ὅλον τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ  $ΔΕΖ$  τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ  $ΑΒΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΖ$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΖΕ$ .

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' ὥς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ι.

Ῥῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ 5.  
βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ πρὸς-  
εκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν  
βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ  $ΑΒΓ$  ἴσην ἔχον τὴν  $Fig. 5.$   
 $ΑΒ$  πλευρὰν τῇ  $ΑΓ$  πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν  
ἐπ' εὐθείας ταῖς  $ΑΒ$   $ΑΓ$  εὐθεῖαι αἱ  $ΒΔ$   $ΓΕ$ : λέγω  
ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ  $ΑΒΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  ἴση ἐστίν,  
ἡ δὲ ὑπὸ  $ΓΒΔ$  τῇ ὑπὸ  $ΒΓΕ$ .

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς  $ΒΔ$  τυχὸν σημεῖον τὸ  $Ζ$ ,

καὶ ἀφηγήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς  $AE$  τῇ ἐλάσσονι τῇ  $AZ$  ἴση ἡ  $AH$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $ZΓ$   $HB$  εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $AZ$  τῇ  $AH$  ἡ δὲ  $AB$  τῇ  $AG$ , δύο δὴ αἱ  $ZA$   $AG$  δυοὶ ταῖς  $HA$   $AB$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσιν τὴν ὑπὸ  $ZAH$ . βάσις ἄρα ἡ  $ZΓ$  βάσει τῇ  $HB$  ἴση ἔστι, καὶ τὸ  $AZΓ$  τρίγωνον τῷ  $AHB$  τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ  $AGZ$  τῇ ὑπὸ  $ABH$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $AZΓ$  τῇ ὑπὸ  $AHB$ . Καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ  $AZ$  ὅλη τῇ  $AH$  ἐστὶν ἴση, ὣν ἡ  $AB$  τῇ  $AG$  ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ  $BZ$  λοιπῇ τῇ  $ΓH$  ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ  $ZΓ$  τῇ  $HB$  ἴση. δύο δὴ αἱ  $BZ$   $ZΓ$  δυοὶ ταῖς  $ΓH$   $HB$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $BZΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΓHB$  ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ  $BΓ$ , καὶ τὸ  $BZΓ$  ἄρα τρίγωνον τῷ  $ΓHB$  τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ  $ZBΓ$  τῇ ὑπὸ  $HΓB$  ἡ δὲ ὑπὸ  $BΓZ$  τῇ ὑπὸ  $ΓBH$ . Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ  $ABH$  γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ  $AGZ$  γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὣν ἡ ὑπὸ  $ΓBH$  τῇ ὑπὸ  $BΓZ$  ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ABΓ$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $AGB$  ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ  $ABΓ$  τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ZBΓ$  τῇ ὑπὸ  $HΓB$  ἴση, καὶ εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλή- 6.  
λαις ᾧσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑπο-  
τείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐστω τρίγωνον τὸ  $ABΓ$  ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ  $Fig. 6.$   
 $ABΓ$  γωνίαν τῇ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ  
πλευρὰ ἢ  $AB$  πλευρᾷ τῇ  $ΑΓ$  ἐστὶν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἢ  $AB$  τῇ  $ΑΓ$ , μία αὐτῶν  
μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἢ  $AB$ , καὶ ἀφηρήσθω  
ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς  $AB$  τῇ ἐλάσσονι τῇ  $ΑΓ$  ἴση  
ἢ  $ΔB$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἢ  $ΔΓ$ .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἢ  $ΔB$  τῇ  $ΑΓ$  κοινὴ δὲ ἢ  $BΓ$ ,  
δύο δὲ αἱ  $ΔB BΓ$  δυοὶ ταῖς  $ΑΓ ΓB$  ἴσαι εἰσὶν,  
ἐκατέρα ἐκατέρᾳ, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ  $ΔBΓ$  γωνία τῇ  
ὑπὸ  $ΑΓB$  ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἢ  $ΔΓ$  βάσει τῇ  $AB$   
ἴση ἐστίν, καὶ τὸ  $ΔBΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΑΓB$  τριγώνῳ  
ἴσον ἔσται, τὸ ἐλάσσον τῷ μείζονι, ὅπερ ἀτόπον οὐκ  
ἄρα ἄνισός ἐστιν ἢ  $AB$  τῇ  $ΑΓ$ · ἴση ἄρα.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις  
ᾧσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευ-  
ραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυοὶ ταῖς αὐ- 7.  
ταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἐκα-  
τέρᾳ ἐκατέρᾳ, οὐ συνσταθήσονται πρὸς ἄλλῃ  
καὶ ἄλλῃ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ  
πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς  $AB$   $Fig. 7.$   
δυοὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς  $ΑΓ ΓB$  ἄλλαι δύο  
εὐθεῖαι αἱ  $ΑΔ ΔB$  ἴσαι, ἐκατέρα ἐκατέρᾳ, συνεστά-  
τωσαν πρὸς ἄλλῃ καὶ ἄλλῃ σημείῳ τῷ τε  $Γ$  καὶ  $Δ$   
ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ  $Γ Δ$  τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι  
ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις τὰ  $A B$ · ὥστε ἴσην εἶναι τὴν



μὲν  $\Gamma A$  τῇ  $\Delta A$  τὸ αὐτὸ πέρασ ἔχουσιν αὐτῇ τὸ  $A$ , τὴν δὲ  $\Gamma B$  τῇ  $\Delta B$  τὸ αὐτὸ πέρασ ἔχουσιν αὐτῇ τὸ  $B$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $\Gamma \Delta$ .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΑΔ$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΔΓ$ . μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΔΓ$  τῆς ὑπὸ  $ΔΓΒ$ . πολλῶ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΓΔΒ$  μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ  $ΔΓΒ$ . Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΓΒ$  τῇ  $ΔΒ$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΓΔΒ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΔΓΒ$ . Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῶ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυαὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρω ἑκατέρω, συσταθήσονται πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

#### Πρότασις 8.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς 8. δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχη, ἑκατέραν ἑκατέρω, ἔχη δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $ΑΒΓ$   $ΔΕΖ$  τὰς δύο πλευ- Fig. 8. ρὰς τὰς  $ΑΒ$   $ΑΓ$  ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς  $ΔΕ$   $ΔΖ$  ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρω, τὴν μὲν  $ΑΒ$  τῇ  $ΔΕ$  τὴν δὲ  $ΑΓ$  τῇ  $ΔΖ$ . ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν  $ΒΓ$  βάσει τῇ  $ΕΖ$  ἴσην. λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$  ἐστὶν ἴση.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ  $ΑΒΓ$  τριγώνου ἐπὶ τὸ  $ΔΕΖ$  τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν  $B$  σημείου ἐπὶ τὸ  $E$  σημεῖον τῆς δὲ  $ΒΓ$  εὐθείας ἐπὶ τὴν  $ΕΖ$ , ἐφαρμόσει καὶ τὸ  $Γ$  σημεῖον ἐπὶ τὸ  $Z$ , διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν  $ΒΓ$  τῇ  $ΕΖ$ . ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς  $ΒΓ$  ἐπὶ τὴν  $ΕΖ$  ἐφαρμόσασαι καὶ αἱ  $ΒΑ$   $ΑΓ$  ἐπὶ τὰς  $ΕΔ$   $ΔΖ$ . Εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ  $ΒΓ$  ἐπὶ βάσιν τὴν  $ΕΖ$

- ἐφαρμόσει, αἱ δὲ  $BA$   $AG$  πλευραὶ ἐπὶ τὰς  $EA$   $ΔE$  οὐκ ἐφαρμόσουσιν ἀλλὰ παραλλάξουσιν ὡς αἱ  $EH$   $HZ$ , συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυοὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρα, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. Οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα, ἐφαρμοζομένης τῆς  $BΓ$  βάσεως ἐπὶ τὴν  $EZ$  βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ  $BA$   $AG$  πλευραὶ ἐπὶ τὰς  $EA$   $ΔZ$ . Ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $BAG$  ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ  $EΔZ$  ἐφαρμόσει καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

### Πρότασις θ'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν 9. δίχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ  $BAG$ · δεῖ δὲ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς  $AB$  τυχὸν σημεῖον τὸ  $Δ$ , καὶ Fig. 9. ἀφωρήσθω ἀπὸ τῆς  $AG$  τῇ  $ΔΔ$  ἴση ἡ  $ΔE$ , καὶ ἐπέξείχθω ἡ  $ΔE$ , καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς  $ΔE$  τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ  $ΔEZ$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $AZ$ · λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ  $BAG$  γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς  $AZ$  εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΔΔ$  τῇ  $ΔE$ , κοινὴ δὲ ἡ  $AZ$ , δύο δὲ αἱ  $ΔA$   $AZ$  δυοὶ ταῖς  $EA$   $AZ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ  $ΔZ$  βάσει τῇ  $EZ$  ἴση ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΔAZ$  γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $EAZ$  ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ

$ΒΑΓ$  δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς  $AZ$  εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### Πρότασις ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην 10.  
δίχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ  $AB$ . Fig. 10.  
δεῖ δὴ τὴν  $AB$  εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ  $ABΓ$  καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  γωνία δίχα τῇ  $ΓΔ$  εὐθείᾳ· λέγω ὅτι ἡ  $AB$  εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ  $Δ$  σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΓΒ$ , κοινὴ δὲ ἡ  $ΓΔ$ , δύο δὴ αἱ  $ΑΓ$   $ΓΔ$  δυοῖ ταῖς  $ΒΓ$   $ΓΔ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΒΓΔ$  ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ  $ΑΔ$  βάσει τῇ  $ΒΔ$  ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ  $AB$  δίχα τέτμηται κατὰ τὸ  $Δ$ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### Πρότασις ια.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ 11.  
δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $AB$  τὸ δὲ δοθέν Fig. 11.  
σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ  $Γ$ · δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ  $Γ$  σημείου τῇ  $AB$  εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς  $ΑΓ$  τυχὸν σημεῖον τὸ  $Δ$ , καὶ κείσθω τῇ  $ΓΔ$  ἴση ἡ  $ΓΕ$ , καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς  $ΔΕ$  τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ  $ΖΔΕ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΖΓ$ · λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ  $AB$  ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ  $Γ$  πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ  $ΖΓ$ .

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ  $\Gamma\Delta$  τῇ  $\Gamma\epsilon$  κοινὴ δὲ ἡ  $\Gamma\mathbf{Z}$ , δύο δὲ αἱ  $\Delta\Gamma$   $\Delta\mathbf{Z}$  δυοὶ ταῖς  $\epsilon\Gamma$   $\epsilon\mathbf{Z}$  ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ  $\Delta\mathbf{Z}$  βάσει τῇ  $\epsilon\mathbf{Z}$  ἴση ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Delta\Gamma\mathbf{Z}$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\epsilon\Gamma\mathbf{Z}$  ἴση ἐστὶ, καὶ εἰσιν ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὁρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶν ὁρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ  $\Delta\Gamma\mathbf{Z}$   $\mathbf{Z}\Gamma\epsilon$ .

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ  $AB$  ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ  $\Gamma$  πρὸς ὁρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ  $\mathbf{Z}\Gamma$ . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### Πρότασις β.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον 12.  
ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ  $AB$  τὸ Fig. 12.  
δὲ δοθέν σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, τὸ  $\Gamma$ . δεῖ  
θὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν  $AB$  ἀπὸ  
τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ  $\Gamma$ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς,  
κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἔτερα μέρη τῆς  $AB$  εὐ-  
θείας τυχὸν σημεῖον τὸ  $\Delta$ , καὶ κέντρῳ μὲν τῷ  $\Gamma$   
διαστήματι δὲ τῷ  $\Gamma\Delta$  κύκλος γεγράφθω ὁ  $\epsilon\mathbf{Z}\mathbf{H}$ ,  
καὶ τετμήσθω ἡ  $\epsilon\mathbf{H}$  εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ  $\Theta$ , καὶ  
ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $\Gamma\mathbf{H}$   $\Gamma\Theta$   $\Gamma\epsilon$  εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἐπὶ  
τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν  $AB$  ἀπὸ τοῦ δοθέν-  
τος σημείου τοῦ  $\Gamma$ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος  
ἤκται ἡ  $\Gamma\Theta$ .

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ  $\mathbf{H}\Theta$  τῇ  $\Theta\epsilon$ , κοινὴ δὲ ἡ  
 $\Theta\Gamma$ , δύο δὲ αἱ  $\mathbf{H}\Theta$   $\Theta\Gamma$  δυοὶ ταῖς  $\epsilon\Theta$   $\Theta\Gamma$  ἴσαι  
εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ  $\Gamma\mathbf{H}$  βάσει τῇ  
 $\Gamma\epsilon$  ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Gamma\Theta\mathbf{H}$  γωνία τῇ  
ὑπὸ  $\epsilon\Theta\Gamma$  ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσιν ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐ-

θεία ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐσ-  
τιν καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεία κάθετος καλεῖται ἐφ'  
τὴν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθείαν ἀπειρον τὴν  $AB$ , ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ  $\Gamma$ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἡκται ἡ  $\Gamma\Theta$ . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### Πρότασις γ'.

Ὡς ἂν εὐθεία ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα γω- 13.  
νίας ποιῇ, ἦτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς  
ἴσας ποιήσῃ.

Εὐθεία γάρ τις ἡ  $AB$  ἐπ' εὐθείαν τὴν  $\Gamma\Delta$  Fig. 13.  
στάθεῖσα γωνίας ποιεῖτω τὰς ὑπὸ  $\Gamma B A$   $A B \Delta$ . λέγω  
ὅτι αἱ ὑπὸ  $\Gamma B A$   $A B \Delta$  γωνίαι ἦτοι δύο ὀρθαί εἰσιν  
ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $\Gamma B A$  τῇ ὑπὸ  $A B \Delta$ ,  
δύο ὀρθαί εἰσιν. Εἰ δὲ οὐ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ  $B$  ση-  
μείου τῇ  $\Gamma\Delta$  εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ  $BE$ . αἱ ἄρα ὑπὸ  
 $\Gamma B E$   $E B \Delta$  δύο ὀρθαί εἰσιν καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ  $\Gamma B E$   
δυσὶ ταῖς ὑπὸ  $\Gamma B A$   $A B E$  ἴση ἐστὶ, κοινὴ προς-  
κείσθω ἡ ὑπὸ  $E B \Delta$ . αἱ ἄρα ὑπὸ  $\Gamma B E$   $E B \Delta$  τρισὶ  
ταῖς ὑπὸ  $\Gamma B A$   $A B E$   $E B \Delta$  ἴσαι εἰσίν. Πάλιν, ἐπεὶ  
ἡ ὑπὸ  $\Delta B A$  δυσὶ ταῖς ὑπὸ  $\Delta B E$   $E B \Delta$  ἴση ἐστὶ,  
κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $A B \Gamma$ . αἱ ἄρα γωνίαι αἱ  
ὑπὸ  $\Delta B A$   $A B \Gamma$  τρισὶ ταῖς ὑπὸ  $\Delta B E$   $E B \Delta$   $A B \Gamma$   
ἴσαι εἰσίν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ  $\Gamma B E$   $E B \Delta$   
τρिसὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλ-  
λήλοις ἐστὶν ἴσα καὶ αἱ ὑπὸ  $\Gamma B E$   $E B \Delta$  ἄρα ταῖς  
ὑπὸ  $\Delta B A$   $A B \Gamma$  ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ  $\Gamma B E$   $E B \Delta$   
δύο ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ  $\Delta B A$   $A B \Gamma$  ἄρα δυσὶν  
ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ὡς ἂν ἄρα εὐθεία ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα γωνίας

ποιῇ, ἥτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ.

Ἐὰν πρὸς τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ 14.  
σημείῳ δύο εὐθεῖαι ἐξῆς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ  
μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρ-  
θαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλ-  
λήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ  $AB$  καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ Fig. 14.  
σημείῳ  $B$  δύο εὐθεῖαι ἐξῆς αἱ  $BI'$   $BD$  μὴ ἐπὶ  
τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ  
 $ABΓ$   $ABΔ$  δυσὶ ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖτωσαν· λέγω ὅτι  
ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ  $ΓB$  ἢ  $BΔ$ .

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶ τῇ  $ΒΓ$  ἐπ' εὐθείας ἢ  $BΔ$ , ἔστω  
τῇ  $ΓB$  ἐπ' εὐθείας ἢ  $BE$ .

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἢ  $AB$  ἐπ' εὐθεῖαν τὴν  $ΓBE$   
ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ  $ABΓ$   $ABE$  γωνίαι δυσὶν  
ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ  $ABI'$   $ABΔ$   
δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ  $ΓBA$   $ABE$  ταῖς  
ὑπὸ  $ΓBA$   $ABΔ$  ἴσαι εἰσὶ. Κοινὴ ἀφηρησθῶ ἡ ὑπὸ  
 $ABΓ$ · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ABE$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $ABΔ$   
ἐστὶν ἴση, ἢ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνα-  
τον. Οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἢ  $BE$  τῇ  $BI'$ .  
Ὅμοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς  $BΔ$ .  
ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἢ  $ΓB$  τῇ  $BΔ$ .

Ἐὰν ἄρα πρὸς τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ  
σημείῳ δύο εὐθεῖαι ἐξῆς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι  
τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν· ἐπ'  
εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρότασις ιε.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς 15.  
κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιή-  
σουσι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ  $AB$   $ΓΔ$  τεμνέτωσαν ἀλλή- Fig. 15.  
 λας κατὰ τὸ  $E$  σημεῖον· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  
 ὑπὸ  $ΑΕΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΔΕΒ$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $ΓΕΒ$  τῇ  
 ὑπὸ  $ΑΕΔ$ .

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ  $ΑΕ$  ἐπ' εὐθεῖαν τὴν  $ΓΔ$   
 ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ  $ΓΕΑ$   $ΑΕΔ$ · αἱ  
 ἄρα ὑπὸ  $ΓΕΑ$   $ΑΕΔ$  γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.  
 Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ  $ΔΕ$  ἐπ' εὐθεῖαν τὴν  $ΑΒ$   
 ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ  $ΑΕΔ$   $ΔΕΒ$ · αἱ  
 ἄρα ὑπὸ  $ΑΕΔ$   $ΔΕΒ$  γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.  
 Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ  $ΓΕΑ$   $ΑΕΔ$  δυσὶν ὀρθαῖς  
 ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ  $ΓΕΑ$   $ΑΕΔ$  ταῖς ὑπὸ  $ΑΕΔ$   $ΔΕΒ$   
 ἴσαι εἰσὶ. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ  $ΑΕΔ$ , λοιπὴ ἄρα  
 ἡ ὑπὸ  $ΓΕΑ$  λοιπὴ τῇ ὑπὸ  $ΒΕΔ$  ἴση ἐστίν· Ὅμοίως  
 δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ  $ΓΕΒ$   $ΔΕΑ$  ἴσαι εἰσὶν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς  
 κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν· ὅπερ  
 ἔδει δεῖξαι.

### Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ὅτι, ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμ-  
 νωσιν ἀλλήλας, τὰς τέσσαρας γωνίας τέτρασιν ὀρ-  
 θαῖς ἴσας ποιοῦσιν.

(Κὰν πλείους εὐθεῖαι τῶν δυοῖν δι' ἐνὸς σημείου  
 τέμνωσιν ἀλλήλας, οἷον τρεῖς ἢ τέσσαρες ἢ ὅποσαι-  
 οῦν· αἱ γιγνόμεναι γωνίαι πᾶσαι τέτρασιν ὀρθαῖς  
 ἴσαι δείκνυνται.)

### Πρότασις ιε.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν 16.  
 προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας  
 τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν.

Ἐστω τρίγωνον τὸ  $ΑΒΓ$ , καὶ προσεκβεβλήσθω Fig. 16.  
 αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ  $ΒΓ$  ἐπὶ τὸ  $Δ$ · λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς  
 γωνία

γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$  μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ  $ΓΒΑ$   $ΒΑΓ$  γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ  $ΑΓ$  δίχα κατὰ τὸ  $Ε$ , καὶ ἐπιζεύχθεῖσα ἡ  $ΒΕ$  ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ  $Ζ$ , καὶ κείσθω τῇ  $ΒΕ$  ἴση ἡ  $ΕΖ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΖΓ$ , καὶ διήχθω ἡ  $ΑΓ$  ἐπὶ τὸ  $Η$ .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $ΑΕ$  τῇ  $ΕΓ$ , ἡ δὲ  $ΒΕ$  τῇ  $ΕΖ$ , δύο δὲ αἱ  $ΑΕ$   $ΕΒ$  δυοὶ ταῖς  $ΓΕ$   $ΕΖ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΕΒ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΖΕΓ$  ἴση ἐστὶν, κατὰ κορυφὴν γὰρ βάσεις ἄρα ἡ  $ΑΒ$  βάσει τῇ  $ΖΓ$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $ΑΒΕ$  τρίγωνον τῷ  $ΖΕΓ$  τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΒΑΕ$  τῇ ὑπὸ  $ΕΓΖ$ . Μείζων δὲ ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΕΓΔ$  τῆς ὑπὸ  $ΕΓΖ$  μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$  τῆς ὑπὸ  $ΒΑΕ$ . Ὀμοίως δὲ τῆς  $ΒΓ$  τετρημένης δίχα δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ  $ΒΓΗ$ , τουτέστιν ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$ , μείζων καὶ τῆς ὑπὸ  $ΑΒΓ$ .

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστὶν ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ιε.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντα μεταλαμβάνόμεναι. 17.

Ἐστω τρίγωνον τὸ  $ΑΒΓ$ . λέγω ὅτι τοῦ  $ΑΒΓ$  Fig. 17. τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ  $ΒΓ$  ἐπὶ τὸ  $Δ$ .

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  $ΑΒΓ$  ἐκτὸς ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$ , μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ  $ΑΒΓ$ . Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$ . αἱ



ἄρα ὑπὸ  $ΑΓΔ$   $ΑΓΒ$  τῶν ὑπὸ  $ΑΒΓ$   $ΒΓΑ$  μείζονές εἰσιν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ  $ΑΓΔ$   $ΑΓΒ$  δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ  $ΑΒΓ$   $ΒΓΑ$  δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Ὅμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ  $ΒΑΓ$   $ΑΓΒ$  δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ  $ΓΑΒ$   $ΑΒΓ$ .

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ιη.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. 18.

Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ  $ΑΒΓ$  μείζονα ἔχον τὴν  $Fig. 18.$   
 $ΑΓ$  πλευρὰν τῆς  $ΑΒ$ · λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΒΓ$  μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ  $ΒΓΑ$ .

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῆς  $ΑΒ$ , κείσθω τῇ  $ΑΒ$  ἴση ἡ  $ΑΔ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΒΔ$ .

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  $ΒΔΓ$  ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΔΒ$ , μείζων ἐστὶ τῆς ἐντός καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ  $ΔΓΒ$ · ἴση δὲ ἡ ὑπὸ  $ΑΔΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΒΔ$ , ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ  $ΑΒ$  τῇ  $ΑΔ$  ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $ΑΒΔ$  τῆς ὑπὸ  $ΑΓΒ$ · πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΒΓ$  μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ  $ΑΓΒ$ .

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ιθ.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. 19.

Ἐστω τρίγωνον τὸ  $ΑΒΓ$  μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ  $Fig. 19.$   
 $ΑΒΓ$  γωνίαν τῆς ὑπὸ  $ΒΓΑ$ · λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ  $ΑΓ$  πλευρᾶς τῆς  $ΑΒ$  μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΑΒ$ , ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΑΒ$ · ἴση γὰρ

ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὲρ  $ABΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΓΒ$ . οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $AB$ . Οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῆς  $AB$ . ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ABΓ$  τῆς ὑπὸ  $ΑΓΒ$ . οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῆς  $AB$ . Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστὶ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῆς  $AB$ .

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς 20. λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι.

Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ  $ABΓ$ . λέγω ὅτι τοῦ  $ABΓ$  Fig. 20. τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι, αἱ μὲν  $BA$   $ΑΓ$  τῆς  $BΓ$ , αἱ δὲ  $AB$   $BΓ$  τῆς  $ΑΓ$ , αἱ δὲ  $BΓ$   $ΓΑ$  τῆς  $AB$ .

Διήχθω γὰρ ἡ  $BA$  ἐπὶ τὸ  $Δ$  σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ  $ΓΑ$  ἴση ἡ  $ΔΑ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΔΓ$ .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ  $ΔΑ$  τῇ  $ΑΓ$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΔΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΓΔ$ · ἀλλ' ἡ ὑπὸ  $BΓΔ$  γωνία τῆς ὑπὸ  $ΑΓΔ$  μείζων ἐστὶ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ  $BΓΔ$  τῆς ὑπὸ  $ΑΔΓ$ · καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστί τὸ  $ΔΓΒ$  μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ  $BΓΔ$  γωνίαν τῆς ὑπὸ  $ΒΔΓ$ , ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ  $ΔΒ$  ἄρα τῆς  $BΓ$  ἐστὶ μείζων. Ἰση δὲ ἡ  $ΔΒ$  ταῖς  $BA$   $ΑΓ$ · μείζονες ἄρα αἱ  $BA$   $ΑΓ$  τῆς  $BΓ$ . Ὀμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν  $AB$   $BΓ$  τῆς  $ΓΑ$  μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ  $BΓ$   $ΓΑ$  τῆς  $AB$ .

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις κα.

Ἐάν τριγώνου ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν 21.  
ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συστα-  
θῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τρι-  
γώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μὲν ἔσονται,  
μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ  $ABΓ$  ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν *Fig. 21.*  
τῆς  $ΒΓ$ , ἀπὸ τῶν περάτων τῶν  $Β Γ$  δύο εὐθεῖαι  
ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ  $ΒΔ ΔΓ$ , λέγω ὅτι αἱ  $ΒΔ$   
 $ΔΓ$  τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, τῶν  $ΒΑ$   
 $ΑΓ$ , ἐλάσσονες μὲν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν,  
τὴν ὑπὸ  $ΒΔΓ$  τῆς ὑπὸ  $ΒΑΓ$ .

Διήχθω γὰρ ἡ  $ΒΔ$  ἐπὶ τὸ  $Ε$ .

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς  
λοιπῆς μείζονές εἰσι, τοῦ  $ABE$  ἄρα τριγώνου αἱ δύο  
πλευραὶ αἱ  $AB AE$  τῆς  $BE$  μείζονές εἰσι· κοινὴ  
προσκείσθω ἡ  $ΕΓ$ · αἱ ἄρα  $BA AG$  τῶν  $BE EG$   
μείζονές εἰσι. Πάλιν, ἐπεὶ τοῦ  $ΓΕΔ$  τριγώνου αἱ  
δύο πλευραὶ αἱ  $ΓΕ ΕΔ$  τῆς  $ΓΔ$  μείζονές εἰσι, κοινὴ  
προσκείσθω ἡ  $ΔΒ$ · αἱ  $ΓΕ ΕΒ$  ἄρα τῶν  $ΓΔ ΔΒ$  μεί-  
ζονές εἰσιν. Ἀλλὰ τῶν  $BE EG$  μείζονες ἐδείχθησαν  
αἱ  $BA AG$ · πολλῶν ἄρα αἱ  $BA AG$  τῶν  $ΒΔ ΔΓ$   
μείζονές εἰσι.

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία  
τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστὶ· τοῦ  $ΓΔΕ$   
ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΔΓ$  μείζων ἐστὶ  
τῆς ὑπὸ  $ΓΕΔ$ . Διὰ τὰ αὐτὰ τοίνυν καὶ τοῦ  $ABE$   
τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  $ΓΕΒ$  μείζων ἐστὶ  
τῆς ὑπὸ  $ΒΑΓ$ . Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ  $ΓΕΒ$  μείζων ἐδείχθη  
ἡ ὑπὸ  $ΒΔΓ$ · πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΒΔΓ$  μείζων ἐστὶ τῆς  
ὑπὸ  $ΒΑΓ$ .

Ἐάν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν ἀπὸ  
τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συ-

σταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσανες μὲν εἰσὶ, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

**Πρότασις κβ.**

**Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθεῖσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας.** 22.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ *A B* Fig. 22 *Γ*, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν *A B* τῆς *Γ*, αἱ δὲ *A Γ* τῆς *B*, καὶ ἔτι αἱ *B Γ* τῆς *A*. δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς *A B Γ* τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ *ΔΕ*, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ *Δ* ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ *Ε*, καὶ κείσθω τῇ μὲν *A* ἴση ἡ *ΔΖ*, τῇ δὲ *B* ἴση ἡ *ΖΗ*, τῇ δὲ *Γ* ἴση ἡ *ΗΘ*. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ *Ζ*, διαστήματι δὲ τῷ *ΖΔ* κύκλος γεγράφθω ὁ *ΔΚΛ*. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ *Η*, διαστήματι δὲ τῷ *ΗΘ* κύκλος γεγράφθω ὁ *ΚΛΘ*, καὶ τεμνέτωσαν ἀλλήλους οἱ κύκλοι κατὰ τὸ *Κ*, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ *KZ KH*. λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἴσων ταῖς *A B Γ*, τρίγωνον συνέσταιται τὸ *KZH*.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ *Z* σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ *ΔΚΛ* κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ *ΖΔ* τῇ *ZK*. ἀλλὰ ἡ *ΖΔ* τῇ *A* ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ *KZ* ἄρα τῇ *A* ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ *Η* σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ *ΑΚΘ* κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ *ΗΘ* τῇ *ΗΚ*. ἀλλὰ ἡ *ΗΘ* τῇ *Γ* ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ *KH* ἄρα τῇ *Γ* ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ *ΖΗ* τῇ *B* ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ *KZ ZH HK* τρισὶ ταῖς *A B Γ* ἴσαι εἰσιν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν  $KZ$   $ZH$   $HK$ , αἱ εἰ-  
σιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς  $A$   $B$   $\Gamma$ ,  
τρίγωνον συνέσταται τὸ  $KZH$ . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κγ.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς 23.  
αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ  
γωνία ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστή-  
σασθαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ , τὸ δὲ πρὸς Fig. 23.  
αὐτῇ σημεῖον τὸ  $A$ , ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμ-  
μος ἡ ὑπὸ  $\Delta Γ Ε$ . δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ  
 $AB$  καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $A$  τῇ δοθείσῃ γω-  
νία εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ  $\Delta Γ Ε$  ἴσην γωνίαν εὐθύ-  
γραμμον συστήσασθαι.

Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν  $\Gamma \Delta$   $\Gamma Ε$  τυχόντα  
σημεῖα τὰ  $\Delta$   $E$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $\Delta Ε$ . καὶ ἐκ τριῶν  
εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς  $\Gamma \Delta$   $\Delta Ε$   $\Gamma Ε$ ,  
τρίγωνον συνεστάτω τὸ  $AZH$ , ὥστε ἴσην εἶναι τὴν  
μὲν  $\Gamma \Delta$  τῇ  $AZ$ , τὴν δὲ  $E\Gamma$  τῇ  $AH$ , καὶ εἶτι τὴν  $\Delta Ε$   
τῇ  $ZH$ .

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ  $\Delta \Gamma$   $\Gamma Ε$  δυοὶ ταῖς  $ZA$   $AH$   
ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ  $\Delta Ε$  βάσει  
τῇ  $ZH$  ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Delta Γ Ε$  γωνία τῇ ὑπὸ  
 $ZAH$  ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ  $AB$  καὶ τῷ  
πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $A$  τῇ δοθείσῃ γωνία εὐθυ-  
γράμμῳ τῇ ὑπὸ  $\Delta Γ Ε$  ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνί-  
σταται ἡ ὑπὸ  $ZAH$ . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κδ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς 24.  
δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα,  
τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν

ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξει.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$   $ΔEZ$  τὰς δύο Fig. 24  
πλευρὰς τὰς  $AB$   $ΔΓ$  ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς  $ΔE$   
 $ΔZ$  ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν  $AB$  τῇ  
 $ΔE$  τὴν δὲ  $ΑΓ$  τῇ  $ΔZ$ , γωνία δὲ ἡ ὑπὸ  $BAΓ$  γω-  
νίας τῆς ὑπὸ  $EΔZ$  μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ βάσις  
ἡ  $BΓ$  βάσεως τῆς  $EZ$  μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστίν ἡ ὑπὸ  $BAΓ$  γωνία τῆς  
ὑπὸ  $EΔZ$  γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ  $ΔE$  εὐθείᾳ  
καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $Δ$  τῇ ὑπὸ  $BAΓ$  γωνία  
ἴση ἡ ὑπὸ  $EΔH$ , καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν  $ΑΓ$   $ΔZ$   
ἴση ἡ  $ΔH$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $EH$   $ZH$ .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἡ μὲν  $AB$  τῇ  $ΔE$ , ἡ δὲ  $ΑΓ$   
τῇ  $ΔH$ , δύο δὴ αἱ  $BA$   $ΑΓ$  δυοὶ ταῖς  $EΔ$   $ΔH$  ἴσαι  
εἶσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $BAΓ$  γωνία  
τῇ ὑπὸ  $EΔH$  ἴση ἐστὶ· βάσις ἄρα ἡ  $BΓ$  βάσει τῇ  $EH$   
ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ  $ΔH$  τῇ  $ΔZ$ , ἴση  
ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΔZH$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΔHZ$ · μείζων  
ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΔZH$  τῆς ὑπὸ  $ΕΗZ$ , πολλῷ ἄρα μείζων  
ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $EZH$  τῆς ὑπὸ  $ΕΗZ$ . Καὶ ἐπεὶ τρίγω-  
νόν ἐστι τὸ  $EZH$  μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ  $EZH$  γω-  
νίαν τῆς ὑπὸ  $ΕΗZ$ , ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν  
ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ  
ἡ  $EH$  τῆς  $EZ$ . Ἰση δὲ ἡ  $EH$  τῇ  $BΓ$ · μείζων  
ἄρα καὶ ἡ  $BΓ$  τῆς  $EZ$ .

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς  
δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν δὲ γω-  
νίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐ-  
θειῶν περιεχομένην καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα  
ἔξει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις κ.

Ἐάν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευράς ταῖς 25.  
 δυοῖ πλευραῖς ἴσας ἔχη, ἑκατέραν ἑκατέρα,  
 τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχη καὶ  
 τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει τὴν  
 ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$   $ΔΕΖ$  τὰς δύο πλευ- Fig. 25.  
 ρὰς τὰς  $AB$   $ΑΓ$  ταῖς δυοῖ πλευραῖς ταῖς  $ΔΕ$   $ΔΖ$   
 ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν  $AB$  τῇ  $ΔΕ$ ,  
 τὴν δὲ  $ΑΓ$  τῇ  $ΔΖ$ . βάσις δὲ ἡ  $ΒΓ$  βάσεως τῆς  $ΕΖ$   
 μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνί-  
 ας τῆς ὑπὸ  $ΕΔΖ$  μείζων ἔστιν.

Εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἔστιν αὐτῇ ἢ ἐλάσσων· ἴση  
 μὲν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$ ,  
 ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ ἡ βάσις ἡ  $ΒΓ$  βάσει τῇ  $ΕΖ$ . οὐκ  
 ἔστι δὲ οὐκ ἄρα ἴση ἔστιν ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνία τῇ  
 ὑπὸ  $ΕΔΖ$ . ἀλλ' οὐδὲ μὴν ἐλάσσων· ἐλάσσων γὰρ ἂν  
 ἦν καὶ βάσις ἡ  $ΒΓ$  βάσεως τῆς  $ΕΖ$ . οὐκ ἔστι δὲ οὐκ  
 ἄρα ἐλάσσων ἔστιν ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνία τῆς ὑπὸ  $ΕΔΖ$ .  
 Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ἴση· μείζων ἄρα ἔστιν ἡ ὑπὸ  
 $ΒΑΓ$  γωνία τῆς ὑπὸ  $ΕΔΖ$ .

Ἐάν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευράς ταῖς δυοῖ  
 πλευραῖς ἴσας ἔχη, ἑκατέραν ἑκάτερα, τὴν δὲ βάσιν  
 τῆς βάσεως μείζονα ἔχη καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας  
 μείζονα ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομέ-  
 νην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις κς.

Ἐάν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς 26.  
 δυοῖ γωνίαις ἴσας ἔχη, ἑκατέραν ἑκατέρα,  
 ἔχη δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην,  
 ἦτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν  
 ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν  
 καὶ τὰς λοιπὰς πλευράς ταῖς λοιπαῖς πλευ-

ραῖς ἴσας, ἔξει, ἑκατέραν· ἑκατέρω, καὶ τὴν  
λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴσην.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$   $ΔΕΖ$  τὰς δύο γωνί- Fig. 26.  
μίας τὰς ὑπὸ  $ABΓ$   $BΓA$  δυοῖ ταῖς ὑπὸ  $ΔΕΖ$   $EΖΔ$   
ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν· ἑκατέρω, τὴν μὲν ὑπὸ  $ABΓ$  τῇ  
ὑπὸ  $ΔΕΖ$ , τὴν δὲ ὑπὸ  $BΓA$  τῇ ὑπὸ  $EΖΔ$ . ἐχέτω δὲ  
καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν  
πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν  $BΓ$  τῇ  $EΖ$ . λέγω ὅτι  
καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας  
ἔξει, ἑκατέραν· ἑκατέρω, τὴν μὲν  $AB$  τῇ  $ΔΕ$  τὴν δὲ  
 $ΑΓ$  τῇ  $ΔΖ$ , καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ,  
τὴν ὑπὸ  $BAΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$ .

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $ΔΕ$ , μία αὐτῶν  
μείζων ἐστίν, Ἐστω μείζων ἡ  $AB$ , καὶ κείσθω τῇ  
 $ΔΕ$  ἴση ἡ  $BH$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $HΓ$ .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἡ μὲν  $BH$  τῇ  $ΔΕ$ , ἡ δὲ  $BΓ$   
τῇ  $EΖ$ , δύο δὴ αἱ  $BH$   $BΓ$  δυοῖ ταῖς  $ΔΕ$   $EΖ$  ἴσαι  
εἰσιν, ἑκατέρω· ἑκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $HΒΓ$  γω-  
νία τῇ ὑπὸ  $ΔΕΖ$  ἴση ἐστὶ· βάσις ἄρα ἡ  $HΓ$  βάσις  
τῇ  $ΔΖ$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $HΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τρι-  
γῶνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς  
γωνίαις ἴσαι ἐσονται, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπα-  
τείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $HΓB$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΔΖΕ$ .  
Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ  $ΔΖΕ$  τῇ ὑπὸ  $BΓA$  ὑπόκειται ἴση· καὶ  
ἡ ὑπὸ  $BΓH$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $BΓA$  ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσ-  
σων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός  
ἐστίν ἡ  $AB$  τῇ  $ΔΕ$ , ἴση ἄρα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ  $BΓ$   
τῇ  $EΖ$  ἴση, δύο δὴ αἱ  $AB$   $BΓ$  δυοῖ ταῖς  $ΔΕ$   $EΖ$   
ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρω· ἑκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ABΓ$   
γωνία τῇ ὑπὸ  $ΔΕΖ$  ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ  $ΑΓ$  βά-  
σις τῇ  $ΔΖ$  ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ  $BAΓ$   
λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$  ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἕστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γω-  
νίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὥς ἡ  $AB$  τῇ  $ΔΕ$ .



λέγω πάλιν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν  $ΑΓ$  τῇ  $ΔΖ$ , ἡ δὲ  $ΒΓ$  τῇ  $ΕΖ$ , καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$  ἴση ἔσται.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ  $ΒΓ$  τῇ  $ΕΖ$ , μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ  $ΒΓ$ , καὶ κείσθω τῇ  $ΕΖ$  ἴση ἡ  $ΒΘ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΑΘ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ μὲν  $ΒΘ$  τῇ  $ΕΖ$  ἡ δὲ  $ΑΒ$  τῇ  $ΔΕ$ , δύο δὴ αἱ  $ΑΒ ΒΘ$  δυοὶ ταῖς  $ΔΕ ΕΖ$  ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ  $ΑΘ$  βάσει τῇ  $ΔΖ$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $ΑΒΘ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστίν ἡ ὑπὸ  $ΒΘΑ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΕΖΔ$ . Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ  $ΕΖΔ$  τῇ ὑπὸ  $ΒΓΑ$  ἐστίν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ  $ΒΘΑ$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $ΒΓΑ$  ἴση ἐστίν· τριγώνου δὲ τοῦ  $ΑΘΓ$  ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΘΑ$  ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ  $ΒΓΑ$ , ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ  $ΒΓ$  τῇ  $ΕΖ$ , ἴση ἄρα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ  $ΑΒ$  τῇ  $ΔΕ$  ἴση· δύο δὴ αἱ  $ΑΒ ΒΓ$  δυοὶ ταῖς  $ΔΕ ΕΖ$  ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ  $ΑΓ$  βάσει τῇ  $ΔΖ$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$  ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, ἔχῃ δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μίᾳ πλευρᾷ ἴσην, ἥτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴσην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις κζ.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα 27.  
τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ,  
παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς  $AB$   $\Gamma\Delta$  εὐθεῖα ἐμ- Fig. 27.  
πίπτουσα ἡ  $EZ$  τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ  $AEZ$   
 $EZ\Delta$  ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖτω· λέγω ὅτι παράλληλός  
ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$ .

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ  $AB$   $\Gamma\Delta$  συμπε-  
σοῦνται, ἥτοι ἐπὶ τὰ  $B$   $\Delta$  μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ  $A$   $\Gamma$ .  
Ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπίπτέτωσαν ἐπὶ τὰ  $B$   $\Delta$   
μέρη κατὰ τὸ  $H$ .

Τριγώνου δὴ τοῦ  $EHZ$  ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  
 $AEZ$  ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ  $EZH$ ,  
ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ  $AB$   $\Gamma\Delta$  ἐκβαλλό-  
μεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ  $B$   $\Delta$  μέρη. Ὅμοίως δὴ  
δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ  $A$   $\Gamma$  αἱ δὲ ἐπὶ μηδέ-  
τερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι· παράλ-  
ληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$ .

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα  
τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι  
ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις κη.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα 28.  
τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον  
καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐν-  
τὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς  
ἴσας παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐ-  
θεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς  $AB$   $\Gamma\Delta$  εὐθεῖα ἐμ- Fig. 28.  
πίπτουσα ἡ  $EZ$  τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ  $ENB$   
τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γω-  
νία τῇ ὑπὸ  $H\Theta\Delta$  ἴσην ποιεῖτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ

ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. τὰς ὑπὸ  $BH\Theta$   $H\Theta\Delta$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$ .

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $EHB$  τῇ ὑπὸ  $H\Theta\Delta$ , ἀλλὰ ἡ ὑπὸ  $EHB$  τῇ ὑπὸ  $AH\Theta$  ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ  $AH\Theta$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $H\Theta\Delta$  ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$ .

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ  $BH\Theta$   $H\Theta\Delta$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, εἰς δὲ καὶ αἱ ὑπὸ  $AH\Theta$   $BH\Theta$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ  $AH\Theta$   $BH\Theta$  ταῖς ὑπὸ  $BH\Theta$   $H\Theta\Delta$  ἴσαι. εἰσὶ κοινὴ ἀφηρησθῶ. ἡ ὑπὸ  $BH\Theta$ , λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $AH\Theta$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $H\Theta\Delta$  ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$ .

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις 29.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς τε ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. 29.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς  $AB$   $\Gamma\Delta$  εὐθεῖα ἐμπίπτει τῇ  $EZ$ . λέγω ὅτι τὰς τε ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ  $AH\Theta$   $H\Theta\Delta$  ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ  $EHB$  τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ  $H\Theta\Delta$  ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ  $BH\Theta$   $H\Theta\Delta$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. Fig. 29.

Εἰ γὰρ ἀντίος ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $AH\Theta$  τῇ ὑπὸ  $H\Theta\Delta$ ,

μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ  $AH\Theta$ , καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $AH\Theta$  τῆς ὑπὸ  $H\Theta\Delta$ , κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $BH\Theta$ . αἱ ἄρα ὑπὸ  $AH\Theta$   $BH\Theta$  τῶν ὑπὸ  $BH\Theta$   $H\Theta\Delta$  μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ  $AH\Theta$   $BH\Theta$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, αἱ ἄρα ὑπὸ  $BH\Theta$   $H\Theta\Delta$  δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα  $AB$   $\Gamma\Delta$  ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκείσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ  $AH\Theta$  τῇ ὑπὸ  $H\Theta\Delta$ . ἴση ἄρα.

Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ  $AH\Theta$  τῇ ὑπὸ  $EH\Theta$  ἐστὶν ἴση καὶ ἡ ὑπὸ  $EH\Theta$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $H\Theta\Delta$  ἐστὶν ἴση.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $BH\Theta$ . αἱ ἄρα ὑπὸ  $EH\Theta$   $BH\Theta$  ταῖς ὑπὸ  $BH\Theta$   $H\Theta\Delta$  ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ  $EH\Theta$   $BH\Theta$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ· καὶ αἱ ὑπὸ  $BH\Theta$   $H\Theta\Delta$  ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις λ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἄλλοι 30.  
λήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἐστω ἑκατέρα τῶν  $AB$   $\Gamma\Delta$  τῇ  $EZ$  παράλληλος. Fig. 30.  
λέγω ὅτι καὶ ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$  ἐστὶ παράλληλος.

Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ  $HK$ .

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς  $AB$   $EZ$  εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ  $HK$ , ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $AH\Theta$  τῇ ὑπὸ  $H\Theta Z$ . Πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς  $EZ$   $\Gamma\Delta$  εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ  $HK$ , ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $H\Theta Z$  τῇ ὑπὸ  $HK\Delta$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ

$AHK$  τῇ ὑπὸ  $H\Theta Z$  ἴση. Καὶ ἡ ὑπὸ  $AHK$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $HK\Delta$  ἐστὶν ἴση καὶ εἴσιν ἐναλλάξ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$ .

Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λ᾽.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ, 31.  
εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ  $A$ , ἡ δὲ δοθεῖσα Fig 31.  
εὐθεῖα ἡ  $B\Gamma$ . δεῖ δὴ διὰ τοῦ  $A$  σημείου τῇ  $B\Gamma$   
εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς  $B\Gamma$  τυχὸν σημεῖον τὸ  $\Delta$ , καὶ  
ἐπεζεύχθω ἡ  $A\Delta$  καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ  $\Delta A$  εὐ-  
θείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $A$  τῇ ὑπὸ  $A\Delta\Gamma$   
γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ  $\Delta A E$  καὶ ἐκβεβλήσθω ἐκ εὐθείας  
τῆς  $EA$  εὐθεῖα ἡ  $AZ$ .

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς  $B\Gamma$   $EZ$  εὐθεῖα  
ἐμπεσοῦσα ἡ  $A\Delta$  τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ  $EAD$   
 $A\Delta\Gamma$  ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν  
ἡ  $EZ$  τῇ  $B\Gamma$ .

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ  $A$  τῇ δοθείσῃ  
εὐθείᾳ τῇ  $B\Gamma$  παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ  
 $EAZ$ . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λβ.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν, 32.  
προεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς  
ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ, καὶ αἱ ἐντὸς  
τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς  
ἴσαι εἰσὶν.

Ἐστω τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$ , καὶ προεκβεβλήσθω Fig. 32.  
αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ  $B\Gamma$  ἐπὶ τὸ  $\Delta$ . λέγω ὅτι ἡ ἐκ-

τὸς γωνία ἢ ὑπὸ  $ΑΓΔ$  ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ  $ΓΑΒ$   $ΑΒΓ$ · καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ  $ΑΒΓ$   $ΒΓΑ$   $ΓΑΒ$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

Ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ  $Γ$  σημείου τῇ  $ΑΒ$  εὐθείᾳ παράλληλος ἡ  $ΓΕ$ .

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ  $ΑΒ$  τῇ  $ΓΕ$ , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ  $ΑΓ$ , αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ  $ΒΑΓ$   $ΑΓΕ$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ  $ΑΒ$  τῇ  $ΓΕ$ , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ  $ΒΔ$ · ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  $ΕΓΔ$  ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ  $ΑΒΓ$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΑΓΕ$  τῇ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$  ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ  $ΒΑΓ$   $ΑΒΓ$ .

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$ · αἱ ἄρα ὑπὸ  $ΑΓΔ$   $ΑΓΒ$  τρισὶ ταῖς ὑπὸ  $ΑΒΓ$   $ΒΓΑ$   $ΓΑΒ$  ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ  $ΑΓΔ$   $ΑΓΒ$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ· καὶ αἱ ὑπὸ  $ΑΓΒ$   $ΓΒΑ$   $ΓΑΒ$  ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις λγ.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παράλληλους ἐπὶ τὰ 33.  
αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐ-  
ταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἐστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ  $ΑΒ$   $ΓΔ$ , Fig. 33.  
καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι  
αἱ  $ΑΓ$   $ΒΔ$ · λέγω ὅτι καὶ αἱ  $ΑΓ$   $ΒΔ$  ἴσαι τε καὶ  
παράλληλοί εἰσιν.

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ  $BΓ$ .

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $ΓΔ$  καὶ εἰς αὐτάς ἐμπίπτωκεν ἡ  $BΓ$ , αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ  $ABΓ$   $BΓΔ$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $ΓΔ$  κοινὴ δὲ ἡ  $BΓ$ , δύο δὴ αἱ  $AB$   $BΓ$  δυοῖ ταῖς  $ΓΔ$   $BΓ$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ABΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $BΓΔ$  ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ  $ΑΓ$  βάσει τῇ  $ΒΔ$  ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $BΓΔ$  τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἔσονται ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρῃ, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΓΒΔ$ . Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς  $ΑΓ$   $ΒΔ$  εὐθεῖα ἐμπεσοῦσα ἡ  $BΓ$  τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ  $ΑΓΒ$   $ΓΒΔ$  ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΒΔ$ . Ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

### Πρότασις 18.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. 34.

Ἐστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ  $ΑΓΔΒ$ , διά- Fig. 34.  
μετρος δὲ αὐτοῦ ἡ  $BΓ$ . λέγω ὅτι τοῦ  $ΑΓΔΒ$  παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ  $BΓ$  διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $ΓΔ$  καὶ εἰς αὐτάς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ  $BΓ$  αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ  $ABΓ$   $BΓΔ$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΒΔ$ , καὶ εἰς αὐτάς

αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ  $BΓ$ . αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ  $ΑΓΒ$   $ΓΒΔ$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ  $ΑΒΓ$   $ΒΓΔ$  τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ  $ΑΒΓ$   $ΒΓΔ$  δυοὶ ταῖς ὑπὸ  $ΒΓΔ$   $ΓΒΔ$  ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρω, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν τὴν  $BΓ$ . καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἔξει, ἑκατέραν ἑκατέρω, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴση ἄρα ἡ μὲν  $ΑΒ$  πλευρὰ τῇ  $ΓΔ$ , ἡ δὲ  $ΑΓ$  τῇ  $ΒΔ$ , καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΒΔΓ$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ  $ΑΒΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΒΓΔ$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $ΓΒΔ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΓΒ$ . ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΒΔ$  ὅλη τῇ ὑπὸ  $ΑΓΔ$  ἴση ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΓΔΒ$  ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν.

Ἀέγω δὲ ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΒ$  τῇ  $ΓΔ$ , κοινὴ δὲ ἡ  $BΓ$ , δύο δὲ αἱ  $ΑΒ$   $BΓ$  δυοὶ ταῖς  $ΔΓ$   $ΓΒ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΒΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΒΓΔ$  ἴση ἐστὶ. καὶ βάσις ἄρα ἡ  $ΑΓ$  βάσει τῇ  $ΒΔ$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΒΔΓ$  τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα  $BΓ$  διάμετρος δίχα τέμνει τὸ  $ΑΓΔΒ$  παραλληλόγραμμον ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις λε.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 35.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ  $ΑΒΓΔ$   $ΕΒΓΖ$  ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς  $BΓ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΑΖ$   $BΓ$ . λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $ΑΒΓΔ$  παραλληλόγραμμον τῷ  $ΕΒΓΖ$ . Fig. 35



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ  $ABΓΔ$ , ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΒΓ$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ  $ΕΖ$  τῇ  $ΒΓ$  ἴση ἐστὶν· ὥστε καὶ ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΕΖ$  ἴση ἐστὶν· καὶ κοινὴ ἡ  $ΔΕ$ · ὅλη ἄρα ἡ  $ΑΕ$  ὅλη τῇ  $ΔΖ$  ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ  $ΑΒ$  τῇ  $ΔΓ$  ἴση· δύο δὴ αἱ  $ΕΑ ΑΒ$  δυσὲ ταῖς  $ΖΔ ΔΓ$  ἴσαι εἰσὶν, ἐτατέρα ἐκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΖΔΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΕΑΒ$  ἴση ἐστὶν, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς· βάσεις ἄρα ἡ  $ΕΒ$  βάσει τῇ  $ΖΓ$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $ΕΑΒ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΓΖ$  τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ. Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ  $ΔΗΕ$ · λοιπὸν ἄρα τὸ  $ΑΒΗΔ$  τραπέζιον λοιπῷ τῷ  $ΕΗΓΖ$  τραπέζιῳ ἴσον ἐστὶν· κοινὸν προσκείσθω τὸ  $ΗΒΓ$  τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ  $ΑΒΓΔ$  παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ  $ΕΒΓΖ$  παραλληλογράμῳ ἴσον ἐστὶ.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις κʹ.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν. 36.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ  $ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ$  ἐπὶ Fig. 36.  
ἴσων βάσεων ὄντα τῶν  $ΒΓ ΖΗ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΑΘ ΒΗ$ · λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $ΑΒΓΔ$  παραλληλόγραμμον τῷ  $ΕΖΗΘ$ .

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ  $ΒΕ ΓΘ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΒΓ$  τῇ  $ΖΗ$ , ἀλλὰ καὶ ἡ  $ΖΗ$  τῇ  $ΕΘ$  ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ  $ΒΓ$  ἄρα τῇ  $ΕΘ$  ἐστὶν ἴση. Εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ  $ΒΕ ΓΘ$ , αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσιν ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ αἱ  $ΕΒ ΓΘ$  ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι. Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΕΒΓΘ$ ,

καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ  $ABΓΔ$ . βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν  $ΒΓ$ , καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ ταῖς  $ΒΓ ΑΘ$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ  $EZHΘ$  τῷ αὐτῷ τῷ  $EBΓΘ$  ἐστὶν ἴσον. ὥστε καὶ τὸ  $ABΓΔ$  παραλληλόγραμμον τῷ  $EZHΘ$  ἴσον ἐστὶ.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ιξ.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 37.

Ἐστώ τρίγωνα τὰ  $ABΓ ΔΒΓ$ , ἐπὶ τῆς αὐτῆς *Fig. 37.* βάσεως ὄντα τῆς  $ΒΓ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΑΔ ΒΓ$ . λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΒΓ$  τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ  $ΑΔ$  ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ  $Ε Ζ$ , καὶ διὰ μὲν τοῦ  $Β$  τῇ  $ΓΑ$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $ΒΕ$ , διὰ δὲ τοῦ  $Γ$  τῇ  $ΒΔ$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $ΓΖ$ .

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν  $EBΓΑ ΔΒΓΖ$ . καὶ ἴσον τὸ  $EBΓΑ$  τῷ  $ΔΒΓΖ$ . ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς  $ΒΓ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΒΓ ΕΖ$ . καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν  $EBΓΑ$  παραλληλογράμμου ἡμισὺν τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον, ἡ γὰρ  $AB$  διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. τοῦ δὲ  $ΔΒΓΖ$  παραλληλογράμμου ἡμισὺν τὸ  $ΔΒΓ$  τρίγωνον, ἡ γὰρ  $ΔΓ$  διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. Τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΒΓ$  τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις λη.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα 38.  
καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλή-  
λοις ἐστίν.

Ἐστω τρίγωνα τὰ  $ABΓ$   $ΔΕΖ$  ἐπὶ ἴσων βάσε- Fig. 38.  
ων ὄντα τῶν  $ΒΓ$   $ΕΖ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλή-  
λοις ταῖς  $ΒΖ$   $ΑΔ$ · λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρί-  
γωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ  $ΑΔ$  ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη  
ἐπὶ τὰ  $Η$   $Θ$ , καὶ διὰ μὲν τοῦ  $Β$  τῇ  $ΓΑ$  παράλλη-  
λος ἤχθω ἡ  $ΒΗ$ , διὰ δὲ τοῦ  $Ζ$  τῇ  $ΔΕ$  παράλληλος  
ἔχθω ἡ  $ΖΘ$ .

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν  
 $ΗΒΓΑ$   $ΔΕΖΘ$ · καὶ ἴσον τὸ  $ΗΒΓΑ$  τῷ  $ΔΕΖΘ$ , ἐπί-  
τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν  $ΒΓ$   $ΕΖ$  καὶ ἐν ταῖς  
αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΒΖ$   $ΗΘ$ · καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν  
 $ΗΒΓΑ$  παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ  $ABΓ$  τρίγω-  
νον, ἡ γὰρ  $AB$  διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει τοῦ δὲ  
 $ΔΕΖΘ$  παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ  $ΖΕΔ$  τρίγωνον,  
ἡ γὰρ  $ΔΖ$  διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. Τὰ δὲ τῶν  
ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  
 $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα  
καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·  
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις λθ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βά- 39.  
σεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐ-  
ταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα τὰ  $ABΓ$   $ΔΒΓ$  ἐπὶ τῆς αὐ- Fig. 39.  
τῆς βάσεως ὄντα τῆς  $ΒΓ$  καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη·  
λέγω ὅτι ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ  $ΑΔ$ · λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΒΓ$ .

Εἰ γὰρ μή· ἤχθω διὰ τοῦ  $Α$  σημείου τῇ  $ΒΓ$  εὐθεῖα παράλληλος ἡ  $ΑΕ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΕΓ$ .

Ἰσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΕΒΓ$  τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς  $ΒΓ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΒΓ$   $ΑΕ$ . Ἀλλὰ τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΒΕ$  ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ  $ΔΒΕ$  ἄρα τρίγωνον τῷ  $ΕΒΓ$  ἴσον ἐστίν, τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ  $ΑΕ$  τῇ  $ΒΓ$ . Ὀμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς  $ΑΔ$ · ἡ  $ΑΔ$  ἄρα τῇ  $ΒΓ$  ἐστὶ παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

#### Προτάσις μ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα τὰ  $ΑΒΓ$   $ΓΔΕ$  ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν  $ΒΓ$   $ΓΕ$  καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ  $ΑΔ$ · λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΒΕ$ .

Εἰ γὰρ μή· ἤχθω διὰ τοῦ  $Α$  τῇ  $ΒΕ$  παράλληλος ἡ  $ΑΖ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΖΕ$ .

Ἰσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΖΓΕ$  τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν  $ΒΓ$   $ΓΕ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΒΕ$   $ΑΖ$ . Ἀλλὰ τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ  $ΔΓΕ$  τριγώνῳ· καὶ τὸ  $ΔΓΕ$  τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ  $ΖΓΕ$  τριγώνῳ, τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα

Fig. 40.

παράλληλός ἐστιν ἡ  $AZ$  τῇ  $BE$ . Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς  $AD$  ἡ  $AD$  ἄρα τῇ  $BE$  ἐστὶ παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶ παραλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις μα.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχη τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἢ διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. 41.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ  $ABΓΔ$  τριγώνῳ τῷ  $EBΓ$  βάσιν τε ἔχτω τὴν αὐτὴν τὴν  $ΒΓ$ , καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς  $ΒΓ$   $AE$ . λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ  $ABΓΔ$  παραλληλόγραμμον τοῦ  $EBΓ$  τριγώνου. Fig. 41.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ  $AG$ .

Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $EBΓ$  τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστὶν αὐτῷ τῆς  $ΒΓ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΒΓ$   $AE$ . Ἀλλὰ τὸ  $ABΓΔ$  παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ  $ABΓ$  τριγώνου· ἡ γὰρ  $AG$  διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ  $ABΓΔ$  παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ  $EBΓ$  τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχη τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἢ διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις μβ.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν γωνία, ἢ ἐστὶν ἴση τῇ δοθείσῃ ἐνθυγράμμῳ γωνία. 42.

Ἐστω τὸ μὲν δοθέν τρίγωνον τὸ  $ABΓ$ , ἡ δὲ *Fig. 42* δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ  $\Delta$ . δεῖ δὴ τῷ  $ABΓ$  τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν γωνίᾳ, ἥ ἐστὶν ἴση τῇ  $\Delta$  γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Τετμήσθω ἡ  $BΓ$  δίχα κατὰ τὸ  $E$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $AE$ , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ  $EΓ$  εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $E$  τῇ  $\Delta$  γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ  $ΓEZ$ , καὶ διὰ μὲν τοῦ  $A$  τῇ  $EΓ$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $AH$ , διὰ δὲ τοῦ  $Γ$  τῇ  $EZ$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $ΓH$ . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ZEΓH$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $BE$  τῇ  $EI$ , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ  $ABE$  τρίγωνον τῷ  $AEΓ$  τριγώνῳ. ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν  $BE$   $EΓ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $BΓ$   $AH$ . διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τοῦ  $AEΓ$  τριγώνου. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ  $ZEΓH$  παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ  $AEΓ$  τριγώνου. βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ZEΓH$  παραλληλόγραμμον τῷ  $ABΓ$  τριγώνῳ, καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ  $ΓEZ$  γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ  $\Delta$ .

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ  $ABΓ$  ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ  $ZEΓH$  ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $ΓEZ$ , ἥ ἐστὶν ἴση τῇ  $\Delta$ . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### Πρότασις μγ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ *43.* τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ  $ABΓΔ$ , διάμετρος *Fig. 43.* δὲ αὐτοῦ ἡ  $ΑΓ$ , περὶ δὲ τὴν  $ΑΓ$  παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ  $EΘ$   $ZH$ , τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ  $BK$   $KΔ$ . λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $BK$  παραπλήρωμα τῷ  $KΔ$  παραπληρώματι.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ  $ABΓΔ$ , διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ  $ΑΓ$ . ἴσον ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΑΓΔ$  τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ  $EΚΘΑ$ , διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ  $ΑΚ$ . ἴσον ἐστὶ τὸ  $AEK$  τρίγωνον τῷ  $ΑΘΚ$  τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ  $KZΓ$  τρίγωνον τῷ  $KΗΓ$  τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν  $AEK$  τρίγωνον τῷ  $ΑΘΚ$  τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ  $KZΓ$  τῷ  $KΗΓ$ . τὸ  $AEK$  τρίγωνον μετὰ τοῦ  $KΗΓ$  ἐστὶν ἴσον τῷ  $ΑΘΚ$  τριγώνῳ μετὰ τοῦ  $KZΓ$  τριγώνου. ἐστὶ δὲ καὶ ὅλον τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον ὅλῳ τῷ  $ΑΔΓ$  ἴσον. λοιπὸν ἄρα τὰ  $BK$  παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ  $KΔ$  παραπληρώματι ἴσον ἐστὶν.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

#### Πρότασις μδ.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δο- 44.  
θέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν γωνίᾳ, ἥ ἐστὶν ἴση τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμῳ.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ , τὸ δὲ δο- Fig. 44.  
θέν τρίγωνον τὸ  $Γ$ , ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ  $Δ$ . δεῖ δὴ παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν  $AB$  τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ  $Γ$  ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν ἴσῃ τῇ  $Δ$  γωνίᾳ.

Συνεστήτω τῷ  $Γ$  τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ  $BEZH$  ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $EBH$ , ἥ ἐστὶν ἴση τῇ  $Δ$ . καὶ κείσθω, ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν  $BE$  τῇ  $AB$ , καὶ διήχθω ἡ  $ZH$  ἐπὶ τὸ  $Θ$ , καὶ διὰ τοῦ  $A$  ὁποτέρου τῶν  $BH$   $EZ$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $ΑΘ$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $ΘB$ . Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς  $ΑΘ$   $EZ$  εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ  $ΘZ$ , αἱ ἄρα ὑπὸ  $ΑΘZ$

$\Theta Ζ Ε$  γωνίαι δυαὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ  $Β Θ Η$   $Η Ζ Ε$  δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσὶν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ  $Θ Β$   $Ζ Ε$  ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ  $Κ$ , καὶ διὰ τοῦ  $Κ$  σημείου ὁποτέρᾳ τῶν  $Ε Α$   $Ζ Θ$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $Κ Δ$ , καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ  $Θ Α$   $Η Β$  ἐπὶ τὰ  $Δ Μ$  σημεία.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $Θ Δ Κ Ζ$ , διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ  $Θ Κ$ , περὶ δὲ τὴν  $Θ Κ$  παραλληλόγραμμα μὲν τὰ  $Α Η$   $Μ Ε$ , τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ  $Δ Β$   $Β Ζ$ · ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $Δ Β$  τῷ  $Β Ζ$ . Ἀλλὰ τὸ  $Β Ζ$  τῷ  $Γ$  τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ  $Δ Β$  ἄρα τῷ  $Γ$  ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $Α Β Μ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $Η Β Ε$ , ἀλλὰ ἡ ὑπὸ  $Η Β Ε$  τῇ  $Δ$  ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἄρα ὑπὸ  $Α Β Μ$  τῇ  $Δ$  γωνία ἐστὶν ἴση.

Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεΐαν τὴν  $Α Β$  τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ  $Γ$  ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ  $Δ Β$  ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $Α Β Μ$ , ἣ ἐστὶν ἴση τῇ  $Δ$ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### Πρότασις με.

Τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμῳ. 45.

Ἐστω τὸ μὲν δοθέν εὐθύγραμμον τὸ  $Α Β Γ Δ$ , ἡ Fig. 45: δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ  $Ε$ · δεῖ δὴ τῷ  $Α Β Γ Δ$  εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ  $Ε$ .

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ  $Δ Β$ , καὶ συνεστάτω τῷ  $Α Β Δ$  τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ  $Ζ Θ$  ἐν τῇ ὑπὸ  $Θ Κ Ζ$  γωνίᾳ, ἡ ἐστὶν ἴση τῇ  $Ε$ · καὶ παραβέβλησθω παρὰ τὴν  $Θ Η$  εὐθεΐαν τῷ  $Δ Β Γ$  τριγώνῳ ἴσον πα-



ραλληλόγραμμον τὸ  $HM$ , ἐν τῇ ὑπὸ  $H\Theta M$  γωνίᾳ, ἥ ἐστὶν ἴση τῇ  $E$ .

Καὶ ἐπεὶ ἡ  $E$  γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ  $\Theta KZ$   $H\Theta M$  ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ  $\Theta KZ$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $H\Theta M$  ἴση ἐστὶν. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $K\Theta H$ · αἱ ἄρα ὑπὸ  $ZK\Theta$   $K\Theta H$  ταῖς ὑπὸ  $K\Theta H$   $H\Theta M$  ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ  $ZK\Theta$   $K\Theta H$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ  $K\Theta H$   $H\Theta M$  ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Πρὸς δὴ τινι εὐθείᾳ τῇ  $H\Theta$  καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $\Theta$  δύο εὐθεῖαι αἱ  $\Theta K$   $\Theta M$  μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ  $K\Theta$  τῇ  $\Theta M$ . Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς  $KM$   $ZH$  εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ  $\Theta H$ , αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ  $M\Theta H$   $\Theta HZ$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $\Theta H\Lambda$ · αἱ ἄρα ὑπὸ  $M\Theta H$   $\Theta H\Lambda$  ταῖς ὑπὸ  $\Theta HZ$   $\Theta H\Lambda$  ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ  $M\Theta H$   $\Theta H\Lambda$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ  $\Theta HZ$   $\Theta H\Lambda$  ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ  $ZH$  τῇ  $H\Lambda$ . Καὶ ἐπεὶ ἡ  $KZ$  τῇ  $\Theta H$  ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστὶν, ἀλλὰ καὶ ἡ  $\Theta H$  τῇ  $M\Lambda$ · καὶ ἡ  $KZ$  ἄρα τῇ  $M\Lambda$  ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστὶν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ  $KM$   $Z\Lambda$ · καὶ αἱ  $KM$   $Z\Lambda$  ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $KZ\Lambda M$ . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν  $AB\Delta$  τρίγωνον τῷ  $Z\Theta$  παραλληλογράμῳ, τὸ δὲ  $AB\Gamma$  τῷ  $HM$  ὅλον ἄρα τὸ  $AB\Gamma\Delta$  εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ  $KZ\Lambda M$  παραλληλογράμῳ ἴσον ἐστὶ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθύγραμμῳ τῷ  $AB\Gamma\Delta$  ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ  $KZ\Lambda M$  ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $ZKM$ , ἥ ἐστὶν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ  $E$ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

## Πρότασις μς.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον 46.  
ἀναγράψαι.

Ἐστω ἡ δοθείσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ . δεῖ δὴ ἀπὸ Fig. 46.  
τῆς  $AB$  εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἦχθω τῇ  $AB$  εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ  $A$  πρὸς ὀρθὰς ἡ  $AG$ , καὶ κείσθω τῇ  $AB$  ἴση ἡ  $AD$ . καὶ διὰ μὲν τοῦ  $D$  σημείου τῇ  $AB$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $DE$ , διὰ δὲ τοῦ  $B$  σημείου τῇ  $AD$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $BE$ .

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ADEB$ . ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν  $AB$  τῇ  $DE$ , ἡ δὲ  $AD$  τῇ  $BE$ . Ἀλλὰ καὶ ἡ  $AB$  τῇ  $AD$  ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ  $BA$   $AD$   $DE$   $EB$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ADEB$  παραλληλόγραμμον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς  $AB$   $DE$  εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ  $AD$ . αἱ ἄρα ὑπὸ  $BAD$   $ADE$  γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $BAD$ . ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $ADE$ . Τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ  $ABE$   $BED$  γωνιῶν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ADEB$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς  $AB$  εὐθείας ἀναγεγραμμένον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

## Πρότασις μζ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ 47.  
τῆς τῆν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τῆν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ  $ABΓ$ , ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ  $BAΓ$  γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς  $BΓ$  τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $BA$   $AΓ$  τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς  $BΓ$  τετράγωνον τὸ  $BΔEΓ$ · ἀπὸ δὲ τῶν  $BA$   $AΓ$  τὰ  $HB$   $ΘΓ$ , καὶ διὰ τοῦ  $A$  ὁποτέρᾳ τῶν  $BΔ$   $ΓE$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $ΑΔ$ · καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $ΑΔ$   $ZΓ$ .

Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ  $BAΓ$   $BAH$  γωνιῶν· πρὸς δὴ τινὶ εὐθείᾳ τῇ  $BA$  καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $A$  δύο εὐθεῖαι αἱ  $AΓ$   $AH$  μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΓA$  τῇ  $AH$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ  $BA$  τῇ  $AΘ$  ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΔBΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ZBA$ , ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα κοινὴ προσκεισθῶ ἡ ὑπὸ  $ABΓ$ · ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΔBA$  ὅλη τῇ ὑπὸ  $ZBΓ$  ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $ΔB$  τῇ  $BΓ$ , ἡ δὲ  $ZB$  τῇ  $BA$ · δύο δὴ αἱ  $ΔB$   $BA$  δυσὶ ταῖς  $ΓB$   $BZ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΔBA$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ZBΓ$  ἴση ἐστὶν· βάσεις ἄρα ἡ  $ΑΔ$  βάσει τῇ  $ZΓ$  ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ  $ΑΒΔ$  τρίγωνον τῷ  $ZBF$  τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· Καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν  $ΑΒΔ$  τριγώνου διπλάσιον τὸ  $BΔ$  παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν  $BΔ$ , καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παράλληλοις ταῖς  $BΔ$   $ΑΔ$ · τοῦ δὲ  $ZBΓ$  τριγώνου διπλάσιον τὸ  $BH$  τετράγωνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν  $ZB$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παράλληλοις εἰσὶ ταῖς  $ZB$   $HΓ$ . Τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ  $BΔ$  παραλληλόγραμμον τῷ  $HB$  τετραγώνῳ. Ὅμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν  $AE$   $BK$  δειχθήσεται καὶ τὸ  $ΓA$  παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ  $ΘΓ$  τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ  $BΔEΓ$  τετράγωνον δυσὶ τοῖς  $HB$   $ΘΓ$  τετρα-

γώνοις ἴσον ἐστί. Καὶ ἔστι τὸ μὲν  $ΒΔΕΓ$  τετράγωνον ἀπὸ τῆς  $ΒΓ$  ἀναγραφέν, τὰ δὲ  $ΗΒ$   $ΘΓ$  ἀπὸ τῶν  $ΒΑ$   $ΑΓ$ . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $ΒΓ$  πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΒΑ$   $ΑΓ$  πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τετραγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις μή.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις ἢ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθὴ ἔστιν. 48.

Τριγώνου γάρ τοῦ  $ΑΒΓ$  τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς  $ΒΓ$  Fig. 48. πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΒΑ$   $ΑΓ$  πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω ὅτι ὀρθὴ ἔστιν ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνία.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ  $Α$  σημείου τῇ  $ΑΓ$  εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ  $ΑΔ$ , καὶ κείσθω τῇ  $ΒΑ$  ἴση ἡ  $ΑΔ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΔΓ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΔΑ$  τῇ  $ΑΒ$ , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΔΑ$  τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς  $ΑΒ$  τετραγώνῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $ΔΑ$   $ΑΓ$  τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΒΑ$   $ΑΓ$  τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν  $ΔΑ$   $ΑΓ$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΔΓ$ , ὀρθὴ γάρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΔΑΓ$  γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν  $ΒΑ$   $ΑΓ$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΒΓ$ , ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $ΔΓ$  τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $ΒΓ$  τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ  $ΔΓ$  τῇ  $ΒΓ$  ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΑΒ$ , κοινὴ δὲ ἡ  $ΑΓ$ ,

δύο δὲ αἱ  $\Delta A$   $\Delta Γ$  δυοὶ ταῖς  $Β A$   $A Γ$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ  
 βάσεις ἡ  $\Delta Γ$  βάσει τῇ  $Β Γ$  ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  
 $\Delta A Γ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $Β A Γ$  ἴση ἐστίν. Ὄρθὴ δὲ ἡ  
 ὑπὸ  $\Delta A Γ$  ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $Β A Γ$ .

Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν  
 τετράγωνον ἴσον ᾗ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώ-  
 νου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν  
 λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθὴ ἐστίν. ὅπερ  
 εἶδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ πρώτου βιβλίου.

---

# ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

## ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

~~~~~

Ὅροι.

α. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περι- 1.
έχεται λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν
περιέχουσῶν εὐθειῶν.

β. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν 2.
περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμων ἐν
ὁποιοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνῶμων
καλείσθω.

Πρότασις α.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα 1.
αὐτῶν εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα· τὸ περι-
εχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὲρ τῶν δύο εὐθειῶν
ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἐκάσ-
του τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογω-
νίοις.

Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ $Α ΒΓ$, καὶ τετμήσθω Fig. 1.
ἡ $ΒΓ$ ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ $Δ Ε$ σημεία· λέγω ὅτι τὸ
ὑπὸ τῶν $Α ΒΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ
τῷ τε ὑπὸ τῶν $Α ΒΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ καὶ τῷ
ὑπὸ $Α ΔΕ$ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν $Α ΕΓ$.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ $Β$ τῇ $ΒΓ$ πρὸς ὀρθὰς ἡ
 $ΒΖ$, καὶ κείσθω τῇ $Α$ ἴση ἡ $ΒΗ$, καὶ διὰ μὲν του

Ἡ τῇ $BΓ$ παράλληλος ἤχθω ἡ $HΘ$, διὰ δὲ τῶν A
 $E Γ$ τῇ BH παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ $ΔΚ ΕΛ ΓΘ$.

Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ $BΘ$ τοῖς $BK ΔΑ ΕΘ$. Καὶ
ἐστὶ τὸ μὲν $BΘ$ τὸ ὑπὸ τῶν $A BΓ$, περιέχεται μὲν
γὰρ ὑπὸ τῶν $HB BΓ$, ἴση δὲ ἡ BH τῇ A . τὸ δὲ
 BK τὸ ὑπὸ τῶν $A BΔ$, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν
 $HB BΔ$, ἴση δὲ ἡ BH τῇ A . τὸ δὲ $ΔΑ$ τὸ ὑπὸ τῶν
 $A ΔΕ$, ἴση γὰρ ἡ $ΔΚ$, τοῦτ' ἐστὶν ἡ BH , τῇ A .
καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ $ΕΘ$ τὸ ὑπὸ τῶν $A ΕΓ$. τὸ ἄρα
ὑπὸ τῶν $A BΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ $A BΔ$ καὶ τῷ
ὑπὸ $A ΔΕ$ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ $A ΕΓ$.

Ἐὰν ἄρα ὥσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα
αὐτῶν εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα τὸ περιεχόμενον
ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ
τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἐκάστου τῶν τμημάτων, περιεχο-
μένοις ὀρθογωνίοις ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὥς ἔτυχε, τὰ 2.
ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐκατέρου τῶν τμημάτων
περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ
τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ AB τετμήσθω ὥς ἔτυχε κατὰ τὸ *Fig. 2.*
 $Γ$ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $AB BΓ$ περιεχό-
μενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν $BA ΑΓ$ περι-
εχομένου ὀρθογωνίου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τε-
τραγώνῳ.

Ἀναγρεγράψθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον
τὸ $ΑΔΕΒ$, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ $Γ$ ὁποτέρῳ τῶν $ΑΔ$
 BE παράλληλος ἡ $ΓΖ$.

Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ AE τοῖς $AZ ΓΕ$. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν
 AE τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον, τὸ δὲ AZ τὸ ὑπὸ
τῶν $BA ΑΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται
μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν $ΔΑ ΑΓ$, ἴση δὲ ἡ $ΔΑ$ τῇ AB , τὸ
δε

δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ AB ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ BE τῇ AB. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν AB ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχεν τὸ 3.
ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐνὸς τῶν τμημάτων περι-
εχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ
τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ
τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετρα-
γώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχεν κατὰ Fig. 3.
τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB ΒΓ περι-
εχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ
περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τε-
τραγώνου.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνον
τὸ ΓΔΕΒ, καὶ διήχθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ
Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ ΒΕ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΖ.

Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ ΑΕ τοῖς ΑΔ ΓΕ· καὶ ἐστὶ τὸ
μὲν ΑΕ τὸ ὑπὸ τῶν AB ΒΓ περιεχόμενον ὀρθο-
γώνιον, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν AB ΒΕ, ἴση
δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ,
ἴση γὰρ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ· τὸ δὲ ΔΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ
τετραγώνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB ΒΓ περιεχόμενον
ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ περιεχο-
μένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις δ.

Ἐάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὥς ἔτυχεν τὸ 4.
ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε
ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δις
ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB τετμήσθω ὥς ἔτυχεν Fig. 4.
κατὰ τὸ Γ . λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον
ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν AG GB τετραγώνοις καὶ
τῷ δις ὑπὸ τῶν AG GB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀναγεγράψθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον
τὸ $ADEB$, καὶ ἐπέξέχθω ἡ BD , καὶ διὰ μὲν τοῦ
 Γ ὁποτέρου τῶν AD EB παράλληλος ἦχθω ἡ $G\Lambda Z$,
διὰ δὲ τοῦ H ὁποτέρου τῶν AB DE παράλληλος ἦχ-
θω ἡ ΘK .

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ GZ τῇ AD , καὶ
εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ BD . ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ
 GHB ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ADB .
Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ADB τῇ ὑπὸ ABD ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ
πλευρὰ ἡ BA τῇ AD ἐστὶν ἴση καὶ ἡ ὑπὸ GHB
ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ HBG ἐστὶν ἴση ὥστε καὶ πλευρὰ
ἡ BG πλευρὰ τῇ GH ἐστὶν ἴση ἀλλὰ καὶ ἡ GB
τῇ HK ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ GH τῇ BK . καὶ ἡ HK ἄρα
τῇ KB ἐστὶν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $GHBK$.
Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παράλλη-
λός ἐστιν ἡ GH τῇ BK , καὶ εἰς αὐτὰς ἐπέπεσεν ἡ
 GB . αἱ ἄρα ὑπὸ KBG BGH γωνίαι δυοῖν ὀρθαῖς
εἰσιν ἴσαι. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ KBG . ὀρθὴ ἄρα καὶ
ἡ ὑπὸ BGH . ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ GHK
 HKB ὀρθαὶ εἰσιν. Ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $GHBK$.
ἔδειχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον. τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ
ἐστὶν ἀπὸ τῆς GB . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ΘZ τε-
τράγωνόν ἐστι, καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΘH , τοῦτ' ἐστὶν
ἀπὸ τῆς AG . τὰ ἄρα ΘZ GK τετράγωνα ἀπὸ τῶν

$ΑΓ ΓΒ$ ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ $ΑΗ$ τῷ $ΗΕ$, καὶ ἐστὶ τὸ $ΑΗ$ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ ΓΒ$, ἴση γὰρ ἡ $ΗΓ$ τῇ $ΓΒ$ · καὶ τὸ $ΗΕ$ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΑΓ ΓΒ$ · τὰ ἄρα $ΑΗ ΗΕ$ ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ ΓΒ$. Ἔστι δὲ καὶ τὰ $ΘΖ ΓΚ$ τετράγωνα ἀπὸ τῶν $ΑΓ ΓΒ$ · τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ $ΘΖ ΓΚ ΑΗ ΗΕ$ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν $ΑΓ ΓΒ$ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ ΓΒ$ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Ἀλλὰ τὰ τέσσαρα $ΘΖ ΓΚ ΑΗ ΗΕ$ ὅλον ἐστὶ τὸ $ΑΔΕΒ$, ὃ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν $ΑΓ ΓΒ$ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ ΓΒ$ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνα ἐστίν.

Πρότασις ι.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ 5.
ἀνίστα τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μετὰξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ $ΑΒ$ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα Fig. 5.
κατὰ τὸ $Γ$, εἰς δὲ ἀνίστα κατὰ τὸ $Δ$ · λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ ΔΒ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γάρ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$ τετράγωνον τὸ $ΓΕΖΒ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΒΕ$ · καὶ διὰ μὲν τοῦ $Δ$

ὁποτέρᾳ τῶν $ΓΕ$ BZ παράλληλος ἦχθῃ ἡ $ΛΘΗ$,
διὰ δὲ τοῦ $Θ$ ὁποτέρᾳ τῶν $ΑΒ$ EZ παράλληλος ἦχ-
θῃ ἡ $ΚΑΜ$, καὶ πάλιν διὰ τοῦ $Α$ ὁποτέρᾳ τῶν $ΓΔ$
 $ΒΜ$ παράλληλος ἦχθῃ ἡ $ΑΚ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ $ΓΘ$ παραπλήρωμα τῷ
 $ΘΖ$ παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθῃ τὸ $ΔΜ$.
ὅλον ἄρα τὸ $ΓΜ$ ὅλῳ τῷ $ΔΖ$ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ
 $ΓΜ$ τῷ $ΑΔ$ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΒ$ ἐστὶν
ἴση· καὶ τὸ $ΑΔ$ ἄρα τῷ $ΔΖ$ ἴσον ἐστὶ. Κοινὸν προσ-
κείσθῃ τὸ $ΓΘ$. ὅλον ἄρα τὸ $ΑΘ$ τῷ $ΝΞΟ$ γνώμονι
ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ $ΑΘ$ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$ $ΔΒ$ ἐστίν,
ἴση γὰρ ἡ $ΔΘ$ τῇ $ΔΒ$ · καὶ ὁ $ΝΞΟ$ ἄρα γνώμων ἴσος
ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$ $ΔΒ$. Κοινὸν προσκείσθῃ τὸ $ΛΗ$,
ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$. ὁ ἄρα $ΝΞΟ$ γνώμων
καὶ τὸ $ΛΗ$ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$ $ΔΒ$ περιεχο-
μένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$ τετραγώνῳ.
Ἀλλὰ ὁ $ΝΞΟ$ γνώμων καὶ τὸ $ΛΗ$ ὅλον ἐστὶ τὸ
 $ΓΕΖΒ$ τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς $ΓΒ$ · τὸ ἄρα
ὑπὸ τῶν $ΑΔ$ $ΔΒ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ
ἀπὸ τῆς $ΓΔ$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$
τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . .
ὅπερ· εἶδει δεῖξαι.

Πρότασις ε΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προσ- 6.
τεθῇ δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας τὸ
ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς
προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον με-
τὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον
ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἕκ τε τῆς ἡμι-
σείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.

Ἐὐθεῖα γάρ τις ἡ $ΑΒ$ τετμήσθῃ δίχα κατὰ Fig. 6.
τὸ $Γ$ σημεῖον, προσκείσθῃ δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ'

εὐθείας ἢ $ΒΔ$ λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ ΔΒ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$ τετράγωνον τὸ $ΓΕΖΔ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΔΕ$, καὶ διὰ μὲν τοῦ $Β$ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν $ΓΕ ΔΖ$ παράλληλος ἦχθω ἡ $ΒΘΗ$, διὰ δὲ τοῦ $Θ$ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν $ΑΔ ΕΖ$ παράλληλος ἦχθω ἡ $ΚΑΜ$, καὶ ἔτι διὰ τοῦ $Α$ ὁποτέρᾳ τῶν $ΓΔ ΔΜ$ παράλληλος ἦχθω ἡ $ΑΚ$.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΒ$, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ $ΑΔ$ τῷ $ΓΘ$. Ἀλλὰ τὸ $ΓΘ$ καὶ τῷ $ΘΖ$ ἴσον ἐστὶ· καὶ τὸ $ΑΔ$ ἄρα τῷ $ΘΖ$ ἴσον ἐστίν. Κοινὸν προσκείσθω τὸ $ΓΜ$ · ὅλον ἄρα τὸ $ΑΜ$ τῷ $ΝΞΟ$ γνώμονι ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ $ΑΜ$ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ ΔΒ$, ἴση γάρ ἐστὶν ἡ $ΔΜ$ τῇ $ΔΒ$ · καὶ ὁ $ΝΞΟ$ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΑΔ ΔΒ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ $ΔΗ$, ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ ΔΒ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ $ΝΞΟ$ γνώμονι καὶ τῷ $ΔΗ$. Ἀλλὰ ὁ $ΝΞΟ$ γνώμων καὶ τὸ $ΔΗ$ ὅλον ἐστὶ τὸ $ΓΕΖΔ$ τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς $ΓΔ$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ ΔΒ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ πρώτῃ . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχεν τὸ 7.
ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἐνὸς τῶν τμημάτων,
τὰ συναμφοτέρα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ
τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου

τμήματος περιεχομένου ὀρθογωνίου καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεΐα γὰρ τις ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ Γ σημείον· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AB $B\Gamma$ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν AB $B\Gamma$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓA τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $AD\epsilon B$ · καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ AH τῷ HE , κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓZ · ὅλον ἄρα τὸ AZ ὅλῳ τῷ ΓE ἴσον ἐστίν· τὰ ἄρα AZ ΓE διπλάσιά ἐστι τοῦ AZ . Ἀλλὰ τὰ AZ ΓE ὁ $K\Lambda M$ ἐστὶ γνώμων καὶ τὸ ΓZ τετράγωνον· ὁ $K\Lambda M$ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΓZ διπλάσιά ἐστι τοῦ AZ . Ἔστι δὲ τοῦ AZ διπλάσιον καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB $B\Gamma$, ἴση γὰρ ἡ BZ τῇ $B\Gamma$ · ὁ ἄρα $K\Lambda M$ γνώμων καὶ τὸ ΓZ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB $B\Gamma$. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘN , ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετράγωνον· ὁ ἄρα $K\Lambda M$ γνώμων καὶ τὰ ΓZ ΘN τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν AB $B\Gamma$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ ὁ $K\Lambda M$ γνώμων καὶ τὰ ΓZ ΘN τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ $AD\epsilon B$ καὶ τὸ ΓZ · ἃ ἐστὶν ἀπὸ τῶν AB $B\Gamma$ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB $B\Gamma$ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB $B\Gamma$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεΐα . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η΄

Ἐὰν εὐθεΐα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε· τὸ τετράκκις ὑπὸ τῆς ὁλῆς καὶ ἐνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνον ἴσον ἐστὶ

8.

τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχε κα- Fig. 8.
τὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν AB
 $B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AI
τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB καὶ $B\Gamma$ ὡς
ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ AB εὐθεῖα ἡ
 BA , καὶ κείσθω τῇ ΓB ἴση ἡ BA , καὶ ἀναγεγράφ-
θω ἀπὸ τῆς AI τετράγωνον τὸ $AEZA$, καὶ καταγε-
γράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ BA , ἀλλὰ ἡ μὲν
 ΓB τῇ HK ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ BA τῇ KN · καὶ ἡ HK
ἄρα τῇ KN ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠP
τῇ PO ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓB τῇ
 BA , ἡ δὲ HK τῇ KN · ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ΓK
τῷ BN , τὸ δὲ HP τῷ PN . Ἀλλὰ τὸ ΓK τῷ PN
ἴσον ἐστὶ, παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓO παραλλη-
λογράμμου· καὶ τὸ BN ἄρα τῷ HP ἴσον ἐστίν· τὰ
τέσσαρα ἄρα τὰ ΓK KA HP PN ἴσα ἀλλήλοις
ἐστὶ· τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΓK .
Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓB τῇ BA , ἀλλὰ ἡ μὲν BA
τῇ BK , τοῦτ' ἐστὶ τῇ ΓH ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓB τῇ
 HK , τοῦτ' ἐστὶ τῇ $H\Pi$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΓH ἄρα
τῇ $H\Pi$ ἴση ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓH τῇ
 $H\Pi$, ἡ δὲ ΠP τῇ PO · ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν AH
τῷ $M\Pi$, τὸ δὲ ΠA τῷ PZ . Ἀλλὰ τὸ $M\Pi$ τῷ ΠA
ἐστὶν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ MA παραλλη-
λογράμμου· καὶ τὸ AH ἄρα τῷ PZ ἴσον ἐστίν· τὰ
τέσσαρα ἄρα τὰ AH $M\Pi$ ΠA PZ ἴσα ἀλλήλοις
ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ AH τετραπλάσιά ἐστιν.
Ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓK KA HP PN
τοῦ ΓK τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὀκτὼ, ἃ περιέχει τὸν
 ΣTY γνῶμονα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ AK . Καὶ ἐπεὶ

τὸ AK τὸ ὑπὸ τῶν AB $BΓ$ ἐστίν, ἴση γάρ καὶ ἡ KB τῇ $BΓ$. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB $BΓ$ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ AK . Ἐδείχθη δὲ τοῦ AK τετραπλάσιος καὶ ὁ $ΣΤΥ$ γνόμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB $BΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ $ΣΤΥ$ γνόμονι. Κοινὸν προσκείσθω τὸ $ΞΘ$, ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB $BΓ$ περιεχόμενου ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ $ΣΤΥ$ γνόμονι καὶ τῷ $ΞΘ$. Ἀλλὰ ὁ $ΣΤΥ$ γνόμων καὶ τὸ $ΞΘ$ ὅλον ἐστὶ τὸ $ΑΕΖΔ$ τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς $ΑΔ$. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB $BΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΔ$, τοῦτ' ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB καὶ $BΓ$ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ 9.
ἀνίστα· τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα Fig. 9.
κατὰ τὸ $Γ$, εἰς δὲ ἀνίστα κατὰ τὸ $Δ$. λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$ $ΔB$ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$ $ΓΔ$ τετραγώνων.

Ἔχθω γάρ ἀπὸ τοῦ $Γ$ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΓΕ$, καὶ κείσθω ἴση ἐκατέρῃ τῶν $ΑΓ$ $ΓB$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΕ$ $ΕB$, καὶ διὰ μὲν τοῦ $Δ$ τῇ $ΕΓ$ παράλληλος ἤχθω ἡ $ΔΖ$, διὰ δὲ τοῦ $Ζ$ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ $ΖΗ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΑΖ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΕ$, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $ΕΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΕΓ$. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ $Γ$, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ $ΕΑΓ$ $ΑΕΓ$ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶν καὶ εἰσὶν ἴσαν ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΓΕΑ$ $ΓΑΕ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΓΕΒ$ $ΕΒΓ$ ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΕΒ$ ὀρθή ἐστὶν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ $ΗΕΖ$ ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς, ὀρθή δὲ ἡ ὑπὸ $ΕΗΖ$, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ $ΕΓΒ$ · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΕΖΗ$ ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΗΕΖ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΖΗ$ · ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $ΕΗ$ πλευρᾷ τῇ $ΗΖ$ ἐστὶν ἴση. Πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ $Β$ γωνία ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς, ὀρθή δὲ ἡ ὑπὸ $ΖΔΒ$, ἴση γάρ ἐστι πάλιν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ $ΕΓΒ$ · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΔΖΒ$ ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ $Β$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΖΒ$ · ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $ΖΔ$ πλευρᾷ τῇ $ΔΒ$ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΕ$, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΕ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΑΓ$ $ΓΕ$ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$ $ΓΕ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΕ$ τετράγωνον, ὀρθή γάρ ἡ ὑπὸ $ΑΓΕ$ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΕ$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΕΗ$ τῇ $ΗΖ$, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΗΕ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΗΖ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΕΗ$ $ΗΖ$ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΗΖ$ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΕΗ$ $ΗΖ$ τετραγώνοις ἴσου ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$ · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΕΖ$ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΗΖ$. Ἰση δὲ ἡ $ΗΖ$ τῇ $ΓΔ$ · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΕΖ$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΕΑ$ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΑΕ$ $ΕΖ$ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῷ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$ $ΓΔ$ τε-

ΧΕΙΡΩ ΟΝ:

αἱ διαμέτροι ἴσαι 1.
ἴσαι εἰσίν.
φάπτεσθαι λέγεται, 2.
ἐκβαλλομένη οὐ τίμη

ῥεῖ ἀλλήλων λέγονται, 3.
ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους.
πέχειν ἀπὸ τοῦ κέν- 4.
τρὸς αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου
αἱ ἴσαι ὡς
εἶν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μεί- 5.

ὅ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆ- 6.
ματι κύκλου περιφερείας.
ἡ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη 7.
κύκλου περιφερείας.

ἡ δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς 8.
μακροῦ ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπὸ
αὐτῆς εὐθείας, ἥτις ἐστὶ βάσις
εὐκλειδεῶν εὐθειῶν, ἡ περιεχομένη
αὐτῆς περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθειῶν
καὶ περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγε- 9.
ται ἡ γωνία.

τραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν AE EZ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ τετράγωνον, ὁρθὴ γάρ ἐστίν ἡ ὑπὸ AEZ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AZ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AG GD . Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AZ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν AD DZ , ὁρθὴ γάρ ἡ πρὸς τῷ A γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AD DZ διπλάσια ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν AG GD τετραγώνων. Ἰση δὲ ἡ DZ τῇ DB · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AD DB τετράγωνα διπλάσια ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν AG GD τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα . . . , καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προς- 10.
τεθῇ δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφοτέρα τετράγωνα, διπλάσια ἐστὶ τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἕκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ *Fig. 10.*
 Γ , προσκείσθω δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ BA · λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AD DB τετράγωνα διπλάσια ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν AG GD τετραγώνων.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB πρὸς ὁρθᾶς ἡ ΓE , καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν AG GB , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EA EB , καὶ διὰ μὲν τοῦ E τῇ AD παράλληλος ἦχθω ἡ EZ , διὰ δὲ τοῦ A τῇ ΓE παράλληλος ἦχθω ἡ ZA . Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς $E\Gamma$ ZA εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ EZ , αἱ ὑπὸ ΓEZ EZA ἄρα δυοῖν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ZEB EZA δύο ὁρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὁρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπέπτουσιν· αἱ ἄρα EB ZA ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ

B Δ μέρη συμπεσοῦνται. Ἐμβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτεύωσαν κατὰ τὸ H , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AH .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ GE , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AEΓ$ τῇ ὑπὸ EAG · καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τὸ G · ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ὑπὸ EAG $AEΓ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ $ΓΕΒ$ $EBΓ$ ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ AEB . Καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστὶν ἡ ὑπὸ $EBΓ$, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ABH . Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $BΔH$ ὀρθή, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ $ΔΓΕ$, ἐναλλάξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΔHB$ ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ $ΔHB$ τῇ ὑπὸ $ΔBH$ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ BA πλευρᾷ τῇ $ΔH$ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ EHZ ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Z , ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ G · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ZEH ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ EHZ γωνία τῇ ὑπὸ ZEH · ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ HZ πλευρᾷ τῇ ZE ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ EG τῇ GA , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EG τετραγώνον τῷ ἀπὸ τῆς GA τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν EG GA τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς GA τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν EG GA ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EA τετράγωνα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνου. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ZH τῇ ZE , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HZ τῷ ἀπὸ τῆς ZE · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν HZ ZE διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς EZ . Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν HZ ZE ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EH τετράγωνα· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς EZ . Ἰση δὲ ἡ EZ τῇ GA · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH τετράγωνα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς GA . Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EA διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς AG · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AE EH τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AG GA τε-

τραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν AE EH τέτραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τετραγώνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AH διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AG GD . Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AH ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AD DH · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AD DH διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AG GD . Ἰση δὲ ἡ DH τῇ DB · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AD DB τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AG GD τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ια.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ 11.
ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων
περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ
τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB · δεῖ δὴ τὴν AB Fig. 11.
τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν
τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ
ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ
 $ABDG$, καὶ τεμήσθω ἡ AG δίχα κατὰ τὸ E ση-
μεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BE , καὶ διήχθω ἡ GA ἐπὶ
τὸ Z , καὶ κείσθω τῇ BE ἴση ἡ EZ , καὶ ἀναγεγράφ-
θω ἀπὸ τῆς AZ τετράγωνον τὸ $ZΘ$, καὶ διήχθω ἡ
 $HΘ$ ἐπὶ τὸ K · λέγω ὅτι ἡ AB τέμνεται κατὰ τὸ $Θ$,
ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB $BΘ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον
ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς $AΘ$ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ AG τέμνεται δίχα κατὰ τὸ
 E , πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ AZ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν GZ
 ZA περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE
τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ τετραγώνῳ.
Ἰση δὲ ἡ EZ τῇ EB · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν GZ ZA πε-
ριεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE τετρα-

γώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EB τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς EB ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν BA AE , ὁρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ A γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ ZA μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA AE . Κοινὸν ἀφηγήσθω τὸ ἀπὸ τῆς AE · λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ ZA περιεχόμενον ὁρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓZ ZA τὸ ZK , ἴση γὰρ ἡ AZ τῇ ZH · τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AB τὸ AL · τὸ ἄρα ZK ἴσον ἐστὶ τῷ AL . Κοινὸν ἀφηγήσθω τὸ AK · λοιπὸν ἄρα τὸ $Z\Theta$ τῷ ΘA ἴσον ἐστὶ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΘA τὸ ὑπὸ τῶν AB $B\Theta$, ἴση γὰρ ἡ AB τῇ $B\Delta$ · τὸ δὲ $Z\Theta$ τὸ ἀπὸ τῆς $A\Theta$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB $B\Theta$ περιεχόμενον ὁρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘA τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB τέτμηται κατὰ τὸ Θ , ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB $B\Theta$ περιεχόμενον ὁρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΘA τετραγώνῳ ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις β.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ καθέτος πίπτει, καὶ τῆς προςλαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνία. 12.

Ἐστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ ἀμβλεῖαν Fig. 12. ἔχον τὴν ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ B σημείου ἐπὶ τὴν ΓA ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΔA . λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι

τῶν ἀπὸ τῶν $ΒΑ ΑΓ$ τετραγώνων τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓΑ ΑΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεία ἡ $ΓΔ$ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ $Α$ σημεῖον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΓΑ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΓΑ ΑΔ$ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓΑ ΑΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΒ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΓΑ ΔΒ$ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν $ΓΑ ΑΔ ΔΒ$ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓΑ ΑΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $ΓΔ ΔΒ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$, ὁρθή γὰρ ἡ πρὸς τῷ $Δ$ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΑΔ ΔΒ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΓΒ$ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν $ΓΑ ΔΒ$ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓΑ ΑΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$ τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν $ΓΑ ΔΒ$ τετραγώνων μείζον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓΑ ΑΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ. 13.

Ἐστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ $ΑΒΓ$ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ $Β$ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ $Α$ σημείου ἐπὶ τὴν $ΒΓ$ κάθετος ἡ $ΑΔ$. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τετράγωνον ἔλαττόν ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν $ΓΒ$ Fig. 13

$ΒΑ$ τετραγώνων τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓΒ ΒΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεία ἡ $ΓΒ$ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ $Α$ τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΓΒ ΒΔ$ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν $ΓΒ ΒΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔΓ$ τετραγώνῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΑ$ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΓΒ ΒΔ ΔΑ$ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν $ΓΒ ΒΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΔΑ ΔΓ$ τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $ΒΔ ΔΑ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ $Δ$ γωνία τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΔΑ ΔΓ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΓΒ ΒΔ$ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓΒ ΒΔ$ ὥστε μόνον τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ ἑλάττον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν $ΓΒ ΒΔ$ τετραγώνων τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓΒ ΒΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ.

Τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι. 14.

Ἐστω τὸ δοθέν εὐθύγραμμον τὸ $Α$. δεῖ δὴ τῷ Fig. 14. $Α$ εὐθύγραμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Συνεστάτω γὰρ τῷ $Α$ εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ $ΒΔ$ · εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΕ$ τῇ $ΕΔ$, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. Συνέσταται γὰρ τῷ $Α$ εὐθύγραμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ $ΒΔ$ · εἰ δὲ οὐ, μία τῶν $ΒΕ ΕΔ$ μείζων ἐστὶν. Ἐστω μείζων ἡ $ΒΕ$, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ $Ζ$, καὶ κείσθω τῇ $ΕΔ$ ἴση ἡ $ΕΖ$, καὶ τετμήσθω ἡ $ΒΖ$ δίχα κατὰ τὸ $Η$, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ $Η$, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν $ΗΒ ΗΖ$ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ $ΒΘΖ$,

καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεία ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνῳ. Ἰση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ ΕΗ τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ ΕΗ. Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ ΕΖ τὸ ΒΔ ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ ΖΕ τῇ ΕΔ· τὸ ἄρα ΒΔ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετραγώνῳ. Ἰσον δὲ τὸ ΒΔ τῷ Α εὐθυγράμμῳ· τὸ Α ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφόμενῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Α ἴσον τετράγωνον συνέσταται τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησόμενον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Τέλος τοῦ δευτέρου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

⋄⋄⋄⋄⋄⋄⋄⋄⋄⋄⋄⋄⋄⋄

Ὅροι.

α. Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι εἰσὶν, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν. 1:

β. Εὐθεία κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἀπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον. 2:

γ. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἀπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους. 3:

δ. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ᾖσι. 4:

ε. Μείζον ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει. 5:

ς. Τμήμα κύκλου ἔστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. 6:

ζ. Τμήματος δὲ γωνία ἔστιν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. 7:

η. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἔστιν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥτις ἔστι βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. 8:

θ. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσιν τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσιν τινὰ περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία. 9:

ζ. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

ια. Ὅμοια τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν.

Πρότασις α.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὐρεῖν. 1.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ABΓ$. δεῖ δὴ τοῦ $ABΓ$ κύκλου τὸ κέντρον εὐρεῖν.

Ἦχθω τις εἰς αὐτὸν ὥς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ AB , Fig. 1. καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ AB πρὸς ὀρθᾶς ἤχθω ἡ $\Delta Γ$, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ E , καὶ τετμήσθω ἡ $ΓE$ δίχα κατὰ τὸ Z · λέγω ὅτι τὸ Z κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ H , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ HA $H\Delta$ HB . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $\Delta\Delta$ τῇ ΔB , κοινὴ δὲ ἡ ΔH , δύο δὴ αἱ $\Delta\Delta$ ΔH δυοὶ ταῖς $H\Delta$ ΔB ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ βάσις ἡ HA βάσει τῇ HB ἐστὶν ἴση, ἐκ κέντρου γὰρ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta\Delta H$ γωνία τῇ ὑπὸ $H\Delta B$ ἴση ἐστίν. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρω τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $H\Delta B$. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $Z\Delta B$ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $Z\Delta B$ τῇ ὑπὸ $H\Delta B$, ἢ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ H κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου. Ὅμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Z .

Τὸ Z ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐ-
θεῖά τις εὐθεϊάν τινά δίχα καὶ πρὸς ὁρθὰς τέμνη,
ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Πρότασις β.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφ- 2.
θῇ δύο τυχόντα σημεία, ἢ ἐπὶ τὰ σημεία
ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ
κύκλου.

Ἐστώ κύκλος ὁ $ABΓ$, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας Fig. 2.
αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεία τὰ $A B$. λέγω
ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα
ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ
 AEB , καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $ABΓ$ κύκλου,
καὶ ἔστω τὸ Δ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\Delta A \Delta B$, καὶ
διήχθω ἡ ΔZE .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ ΔB , ἴση ἄρα καὶ
γωνία ἡ ὑπὸ ΔAE τῇ ὑπὸ ΔBE . καὶ ἐπεὶ τριγώ-
νου τοῦ ΔAE μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ AEB .
μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔEB γωνία τῆς ὑπὸ ΔAE . Ἰση,
δὲ ἡ ὑπὸ ΔAD τῇ ὑπὸ ΔBE . μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ
 ΔEB τῆς ὑπὸ ΔBE . Ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν
ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔB τῆς
 ΔE . Ἰση δὲ ἡ ΔB τῇ ΔZ . μείζων ἄρα ἡ ΔZ τῆς
 ΔE , ἢ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη εὐ-
θεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ὅμοίως δὴ δείξο-
μεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας ἐντὸς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ
δύο τυχόντα σημεία, ἢ ἐπὶ τὰ σημεία ἐπιζευγνυμένη
εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις γ.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεϊά τις διὰ τοῦ κέν- 3.
 τρου εὐθεϊάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα
 τέμνη, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει καὶ ἔαν
 πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνη, καὶ δίχα αὐτὴν
 τέμνει.

Ἐστω κύκλος ὁ $ABΓ$, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεϊά τις Fig. 3.
 διὰ τοῦ κέντρου ἢ $ΓΔ$ εὐθεϊάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέν-
 τρου τὴν AB δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Z σημεῖον· λέγω
 ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $ABΓ$ κύκλου, καὶ
 ἔστω τὸ E , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EA EB .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB , κοινὴ δὲ ἡ
 ZE , δύο δὲ δυσὶν ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ EA
 βάσει τῇ EB ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AZE γωνία
 τῇ ὑπὸ EZB ἴση ἐστίν. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ'
 εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις
 ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ
 ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ AZE BZE . Ἡ $ΓΔ$ ἄρα
 διὰ τοῦ κέντρου οὕσα τὴν AB μὴ διὰ τοῦ κέντρου
 οὕσαν δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει

Ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ $ΓΔ$ τὴν AB πρὸς ὀρθὰς τεμ-
 νέτω· λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τοῦτ' ἐστίν,
 ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση
 ἐστὶν ἡ EA τῇ EB , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EAZ
 τῇ ὑπὸ EBZ . Ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ AZE ὀρθὴ
 τῇ ὑπὸ BZE ἴση· δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι τὰ EAZ
 EZB τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα,
 καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινήν αὐτῶν
 τὴν EZ , ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν·
 καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς
 ἴσας ἔξει· ἴση ἄρα ἡ AZ τῇ BZ .

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτά-
σει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις δ.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν 4.
ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι· οὐ τέ-
μνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἐστω κύκλος ὁ $ΑΒΓΔ$, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐ- Fig. 4.
θεῖαι αἱ $ΑΓ$ $ΒΔ$ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ $Ε$
σημεῖον, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι· λέγω ὅτι οὐ
τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα, ὥστε
ἴσην εἶναι τὴν μὲν $ΑΕ$ τῇ $ΕΓ$, τὴν δὲ $ΒΕ$ τῇ $ΕΔ$.
καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου, καὶ
ἔστω τὸ $Ζ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΖΕ$.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ $ΖΕ$ εὐ-
θεϊάν τινά μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν $ΑΓ$ δίχα τέμνει,
καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ
ὑπὸ $ΖΕΑ$. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ $ΖΕ$ εὐθεϊάν
τινα τὴν $ΒΔ$ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνει, καὶ
πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΖΕΒ$.
Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΖΕΑ$ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ
 $ΖΕΑ$ τῇ ὑπὸ $ΖΕΒ$, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ
ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα αἱ $ΑΓ$ $ΒΔ$ τέμνουσιν
ἀλλήλας δίχα.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτά-
σει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ 5.
ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ $ΑΒΓ$ $ΓΔΗ$ τεμνέτωσαν ἀλ- Fig. 5.
λήλους κατὰ τὰ $Β$ $Γ$ σημεῖα· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται
αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ E , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΕΓ$, καὶ διήχθω ἡ EZH ὡς ἔτυχε.

Καὶ ἐπεὶ τὸ E σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΕΓ$ τῇ EZ . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ E σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΓΔΗ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΓΕ$ τῇ $ΕΗ$. ἐδείχθη δὲ ἡ $ΕΓ$ καὶ τῇ EZ ἴση· καὶ ἡ EZ ἄρα τῇ $ΕΗ$ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ E σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν $ΑΒΓ ΓΔΗ$ κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, 6.
οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ $ΑΒΓ ΓΔΕ$ ἐφαπτέσθωσαν Fig. 6
ἀλλήλων κατὰ τὸ $Γ$ σημεῖον· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται
αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον,

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ZΓ$, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ZEB ,

Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ZΓ$ τῇ BZ . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΓΔΕ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ZΓ$ τῇ ZE . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ $ZΓ$ τῇ ZB ἴση· καὶ ἡ ZE ἄρα τῇ ZB ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν $ΑΒΓ ΓΔΕ$ κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ 7.
τι σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου,
ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προς-

πίπτωσιν εὐθεῖαι τινες· μέγιστη μὲν ἐστίν, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή· τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶ· δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ $ΑΒΓΔ$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ *Fig. 7.* ἔστω ἡ $ΑΔ$, καὶ ἐπὶ τῆς $ΑΔ$ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Z , ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ E , καὶ ἀπὸ τοῦ Z πρὸς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαι τινες αἱ ZB $ZΓ$ ZH . λέγω ὅτι μέγιστη μὲν ἐστίν ἡ ZA , ἐλαχίστη δὲ ἡ $ZΔ$. τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν ZB τῆς $ZΓ$ μείζων, ἡ δὲ $ZΓ$ τῆς ZH .

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ BE $ΓE$ HE .

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. αἱ EB EZ ἄρα τῆς BZ μείζονές εἰσιν. Ἰση δὲ ἡ AE τῇ BE , αἱ ἄρα BE EZ ἴσαι εἰσὶ τῇ AZ . μείζων ἄρα ἡ AZ τῆς BZ . Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BE τῇ $ΓE$, κοινὴ δὲ ἡ ZE , δύο δὲ αἱ BE EZ δυοὶ ταῖς $ΓE$ EZ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BEZ γωνίας τῆς ὑπὸ $ΓEZ$ μείζων· βάσις ἄρα ἡ BZ βάσεως τῆς $ΓZ$ μείζων ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $ΓZ$ τῆς ZH μείζων ἐστίν.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ HZ ZE τῆς EH μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ EH τῇ $ΕΔ$. αἱ ἄρα HZ ZE τῆς $ΕΔ$ μείζονές εἰσι. Κοινὴ ἀφηγήσθω ἡ EZ . λοιπὴ ἄρα ἡ HZ λοιπῆς τῆς $ZΔ$ μείζων ἐστὶ. Μέγιστη μὲν ἄρα ἡ ZA , ἐλαχίστη δὲ ἡ $ZΔ$. μείζων δὲ ἡ μὲν ZB τῆς $ZΓ$, ἡ δὲ $ZΓ$ τῆς ZH .

Λέγω ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Z σημείου δύο μόνον ἴσαι εὐθεῖαι προσπεσοῦνται πρὸς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς $ZΔ$ ἐλαχίστης. Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ

EZ εὐθεῖα, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ E , τῇ ὑπὸ HEZ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ $ZEΘ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ZΘ$. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ HE τῇ $EΘ$, κοινὴ δὲ ἡ EZ , δύο δὲ αἱ HE EZ δυοὶ ταῖς $ΘE$ EZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ HEZ γωνία τῇ ὑπὸ $ΘEZ$ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ZH βάσει τῇ $ZΘ$ ἴση ἐστίν. Λέγω δὲ ὅτι τῇ ZH ἄλλη ἴση οὐ προσπесеῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Z σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἡ ZK . Καὶ ἐπεὶ ἡ ZK τῇ ZH ἴση ἐστίν, ἀλλὰ καὶ ἡ $ZΘ$ τῇ ZH · καὶ ἡ ZK ἄρα τῇ $ΘZ$ ἐστὶν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Z σημείου ἑτέρα τις προσπесеῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ HZ · μία ἄρα μόνη.

Ἐὰν ἄρα κύκλον . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ἡ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, 8.
ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν, εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· μέγιστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, ἐλαχίστη δὲ ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶ· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπесоῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστώ κύκλος ὁ $ABΓ$, καὶ τοῦ $ABΓ$ εἰλήφθω Fig. 8.
τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ , καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον αἱ ΔA ΔE ΔZ $\Delta Γ$, ἔσ-

τω δὲ ἡ $\Delta\Lambda$ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι μέγιστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ $\Delta\Lambda$, ἐλαχίστη δὲ ἡ $\Delta\text{Η}$ ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς $\Lambda\text{Η}$ · τῶν δὲ ἄλλων, τῶν μὲν πρὸς τὴν $\Lambda\text{ΕΖΓ}$ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶν, ἡ μὲν $\Delta\text{Ε}$ τῆς $\Delta\text{Ζ}$, ἡ δὲ $\Delta\text{Ζ}$ τῆς $\Delta\text{Γ}$, τῶν δὲ πρὸς τὴν $\Theta\Lambda\text{ΚΗ}$ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς $\Delta\text{Η}$ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν $\Delta\text{Κ}$ τῆς $\Delta\Lambda$, ἡ δὲ $\Delta\Lambda$ τῆς $\Lambda\Theta$.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $\Lambda\text{ΒΓ}$ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Μ · καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ ΜΖ ΜΓ ΜΚ ΜΛ ΜΘ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $\Lambda\text{Μ}$ τῇ ΕΜ , κοινὴ προσκείσθω ἡ ΜΛ · ἡ ἄρα $\Lambda\Delta$ ἴση ἐστὶ ταῖς ΕΜ ΜΛ . Ἀλλ' αἱ ΕΜ ΜΛ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ $\Lambda\Delta$ ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΖΜ , κοινὴ προσκείσθω ἡ ΜΛ , αἱ ΕΜ ΜΛ ἄρα ταῖς ΖΜ ΜΛ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΛ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΛ μείζων ἐστὶ. Βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσεως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῆς ΓΔ μείζων ἐστὶ· μέγιστη μὲν ἄρα ἡ $\Delta\Lambda$, μείζων δὲ ἡ μὲν $\Delta\text{Ε}$ τῆς $\Delta\text{Ζ}$, ἡ δὲ $\Delta\text{Ζ}$ τῆς $\Delta\text{Γ}$.

Καὶ ἐπεὶ αἱ ΜΚ ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΜΗ τῇ ΜΚ , λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῆς ΗΔ μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ $\Delta\text{Η}$ τῆς $\Delta\text{Κ}$ ἐλάσσων ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΜΛΔ ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν τῆς ΜΔ , δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν, αἱ ΜΚ ΚΔ , αἱ ἄρα ΜΚ ΚΔ τῶν ΜΛ $\Delta\Delta$ ἐλάττονές εἰσιν· ὧν ἐστὶν ἴση ἡ ΜΚ τῇ ΜΛ · λοιπὴ ἄρα ἡ $\Delta\text{Κ}$ λοιπῆς τῆς $\Delta\Lambda$ ἐλάττων ἐστίν. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ $\Delta\Lambda$ τῆς $\Delta\Theta$ ἐλάττων ἐστίν· ἐλα-

χίστη μὲν ἄρα ἡ ΔH , ἐλάττων δὲ ἡ μὲν ΔK τῆς ΔA ἢ δὲ ΔA τῆς $\Delta \Theta$.

Λέγω ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ Δ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔH ἐλαχίστης. Συνεστάτω πρὸς τῇ MA εὐθεῖα, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ M , τῇ ὑπὸ KMA γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔMB , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔB . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ MK τῇ MB , κοινὴ δὲ ἡ MA , δύο δὲ αἱ KM MA δυοὶ ταῖς BM MA ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ KMA γωνία τῇ ὑπὸ BMA ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔK βάσει τῇ ΔB ἴση ἐστί. Λέγω δὲ ὅτι τῇ ΔK εὐθεῖᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ ΔN . Ἐπεὶ οὖν ἡ ΔK τῇ ΔN ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ΔK τῇ ΔB ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΔB ἄρα τῇ ΔN ἴση ἐστὶν, ἡ ἔγγιον τῆς ΔH ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερον, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι πρὸς τὸν $AB\Gamma$ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔH ἐλαχίστης προσπεσοῦνται.

Ἐὰν ἄρα κύκλου . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, 9.
ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσ-
πίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι· τὸ
ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma$, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον. Fig. 9.
τὸ Δ , καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν $AB\Gamma$ κύκλον προσπιπ-
τωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔA ΔB $\Delta \Gamma$. λέγω
ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ AB $B\Gamma$, καὶ τετμήσθω-
σαν δίχα κατὰ τὰ E Z σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι
αἱ EA ZA διήχθωσαν ἐπὶ τὰ H K Θ Λ σημεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ EB , κοινὴ δὲ ἡ EA . δύο δὴ αἱ $AE EA$ δυσὶ ταῖς $BE EA$ ἴσαι εἰσὶ καὶ βάσις ἡ AA βάσει τῇ AB ἴση ἐστὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AEA γωνία τῇ ὑπὸ BEA ἴση ἐστίν. ὁρθή· ἄρα ἑκατέρω τῶν ὑπὸ $AEA BEA$ γωνιῶν ἡ HK ἄρα τὴν AB τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὁρθὰς. Καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθεϊάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὁρθὰς τέμνη, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐπὶ τῆς HK ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ $ABΓ$ κύκλου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς $ΘA$ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ $ABΓ$ κύκλου. Καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ $HK ΘA$ εὐθεῖαι, ἢ τὸ A σημεῖον· τὸ A ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου.

Ἐὰν ἄρα κύκλου . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα 10. σημεῖα ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ $ABΓ$ κύκλον τὸν $ΔEZ$ Fig. 10. τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ $B H Z Θ$, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ $BΘ BH$ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ $K A$ σημεῖα καὶ ἀπὸ τῶν $K A$ ταῖς $BΘ BH$ πρὸς ὁρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ $KΓ AM$ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ $A E$ σημεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ $ABΓ$ εὐθεῖά τις ἡ AG εὐθεϊάν τινα τὴν $BΘ$ δίχα καὶ πρὸς ὁρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς AG ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ $ABΓ$ κύκλου. Πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ $ABΓ$ εὐθεῖά τις ἡ $NΞ$ εὐθεϊάν τινα τὴν BH δίχα καὶ πρὸς ὁρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς $NΞ$ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς AG , καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ $AG NΞ$ εὐθεῖαι ἀλλή-

λαις ἢ κατὰ τὸ O . τὸ O ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου. Ὀμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ $ΔΕΖ$ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ O . δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν $ABΓ$ $ΔΕΖ$, τὸ αὐτό ἐστὶ κέντρον τὸ O , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ια.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων 11.
ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα· ἢ ἐπὶ
τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκ-
βαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν
κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ $ABΓ$ $ΔΕ$ ἐφαπτέσθωσαν Fig. 11.
ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ A σημεῖον, καὶ εἰληφθῶ τοῦ
μὲν $ABΓ$ κύκλου κέντρον τὸ Z , τοῦ δὲ $ΔΕ$ τὸ H .
λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευγνυμένη εὐ-
θεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ A σημεῖον πεσεῖται.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ὡς ἡ $ZHΔΘ$,
καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ AH .

Ἐπεὶ οὖν αἱ AH HZ τῆς ZA , τοῦτ' ἐστὶ τῆς
 $ZΘ$, μείζονές εἰσι, κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ZH . λοιπὴ
ἄρα ἡ AH λοιπῆς τῆς $HΘ$ μείζων ἐστίν. Ἰση δὲ ἡ
 AH τῇ $HΔ$ καὶ ἡ $HΔ$ ἄρα τῆς $HΘ$ μείζων ἐστίν,
ἢ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ
ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα
ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ A συναφῆς πεσεῖται. κατὰ τὸ A
ἄρα ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προ-
τάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωται ἀλλήλων 12.
ἐκτὸς, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυ-
μένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ $ABΓ$ $ΔΕ$ ἐφαπτέσθωσαν Fig. 12.
ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ A σημεῖον, καὶ εἰλήφθω
τοῦ μὲν $ABΓ$ κύκλου κέντρον τὸ Z , τοῦ δὲ $ΔΕ$
τὸ H . λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευγνυ-
μένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὡς ἡ $ZΓΔΗ$,
καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ AH .

Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$
κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ZA τῇ $ZΓ$. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ H
σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΔΕ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ
 AH τῇ $HΔ$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ZA τῇ $ZΓ$ ἴση· αἱ
ἄρα ZA AH ταῖς $ZΓ$ $ΔΗ$ ἴσαι εἰσὶν· ὥστε ὅλη ἡ ZH
τῶν ZA AH μείζων ἐστίν, Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ
ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευ-
γνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς οὐκ
ἐλεύσεται δι' αὐτῆς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προ-
τάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις γ.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ 13.
πλείονα σημεία ἢ ἓν, εἴαν τε ἐντὸς εἴαν τε
ἐκτὸς ἐφάπτηται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ $ABΓΔ$ κύκλου τοῦ Fig. 13.
 $EBZΔ$ ἐφαπτέσθω πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα ση-
μεῖα ἢ ἓν, τὰ B $Δ$.

Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν $ABΓΔ$ κύκλου κέντρον
τὸ H · τοῦ δὲ $EBZΔ$ τὸ $Θ$.

Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐ-
 θεΐα ἐπὶ τὰ $B \Delta$ πεσεῖται. Πιπτέτω ὡς ἡ $BH\Theta\Delta$.
 Καὶ ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Delta\Gamma$
 κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BH τῇ $H\Delta$ · μείζων ἄρα ἡ BH
 τῆς $\Theta\Delta$ · πολλῶν ἄρα μείζων ἡ $B\Theta$ τῆς $\Theta\Delta$. Πάλιν,
 ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $EBZ\Delta$ κύκλου,
 ἴση ἐστὶν ἡ $B\Theta$ τῇ $\Theta\Delta$. Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ
 πολλῶν μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος
 κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν.
 Ἀέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐκτός.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ $ΑΓΚ$ κύκλου τοῦ
 $AB\Delta\Gamma$ ἐφάπτεσθω ἐκτός κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν,
 τὰ $A \Gamma$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΑΓ$.

Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν $AB\Delta\Gamma$ $ΑΓΚ$ εἴληπται
 ἐπὶ τῆς περιφέρειας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ
 $A \Gamma$ · ἡ ἄρα ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη
 εὐθεΐα ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται· Ἀλλὰ τοῦ μὲν
 $AB\Delta\Gamma$ ἐντὸς ἔπεσε, τοῦ δὲ $ΑΓΚ$ ἐκτός, ὅπερ ἄτο-
 πον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτός κατὰ
 πλείονα σημεῖα ἢ ἓν. Ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐντός.

Κύκλος ἄρα κύκλου . . . : καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προ-
 τήσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεΐαι ἴσον ἀπέχου- 14.
 σιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσιν
 ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Delta\Gamma$ · καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐ- Fig. 14.
 θεΐαι ἔστωσαν αἱ $AB \Gamma\Delta$ · λέγω ὅτι αἱ $AB \Gamma\Delta$ ἴσον
 ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $AB\Delta\Gamma$ κύκλου,
 καὶ ἔστω τὸ E , καὶ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὰς $AB \Gamma\Delta$ κά-
 θετοι ἤχθωσαν αἱ $EZ EH$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ
 $AE GE$.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ EZ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν AB πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. Ἰση ἄρα ἡ AZ τῇ ZB . διπλῇ ἄρα ἡ AB τῆς AZ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ τῆς ΓH ἐστὶ διπλῇ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$. ἴση ἄρα καὶ ἡ AZ τῇ ΓH . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ EG , ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τῷ ἀπὸ τῆς EG . Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AE ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $AZ ZE$, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Z γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς EG ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $EH HG$, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ H γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $AZ ZE$ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $\Gamma H HE$, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς AZ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓH , ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ AZ τῇ ΓH . λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZE λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον ἐστὶν, ἴση ἄρα ἡ ZE τῇ EH . Ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτάς κάθῃτο ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα $AB \Gamma\Delta$ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ $AB \Gamma\Delta$ εὐθεῖαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τοῦτ' ἐστὶν ἴση ἔστω ἡ EZ τῇ EH , λέγω ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι διπλῇ ἐστὶν ἡ μὲν AB τῆς AZ , ἡ δὲ $\Gamma\Delta$ τῆς ΓH . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ GE , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τῷ ἀπὸ τῆς GE . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AE ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $EZ ZA$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς GE ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $EH HG$ τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $EZ ZA$ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $EH HG$ ὧν τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἐστὶν ἴσον, ἴση γὰρ ἡ EZ τῇ EH . λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AZ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΓH ἴσον ἐστὶν· ἴση ἄρα ἡ AZ τῇ ΓH , καὶ ἐστὶ τῆς μὲν AZ διπλῇ ἡ AB , τῆς δὲ ΓH διπλῇ ἡ $\Gamma\Delta$. ἴση ἄρα ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις α.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος 15. τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἡ ἑγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶ.

Ἐστω κύκλος ὁ $ΑΒΓΔ$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ $ΑΔ$, κέντρον δὲ τὸ $Ε$, καὶ ἑγγιον μὲν τοῦ $Ε$ κέντρου ἐστω ἡ $ΒΓ$, ἀπώτερον δὲ ἡ $ΖΗ$. λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ $ΑΔ$, μείζων δὲ ἡ $ΒΓ$ τῆς $ΖΗ$. Fig. 15.

Ἠχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ $Ε$ κέντρου ἐπὶ τὰς $ΒΓ$ $ΖΗ$ κάθετοι αἱ $ΕΘ$ $ΕΚ$. Καὶ ἐπεὶ ἑγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ $ΒΓ$, ἀπώτερον δὲ ἡ $ΖΗ$, μείζων ἄρα ἡ $ΕΚ$ τῆς $ΕΘ$. Κείσθω τῇ $ΕΘ$ ἴση ἡ $ΕΑ$, καὶ διὰ τοῦ $Α$ τῇ $ΕΚ$ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ $ΑΜ$ διήχθω ἐπὶ τὸ $Ν$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΕΜ$ $ΕΝ$ $ΕΖ$ $ΕΗ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΕΘ$ τῇ $ΕΑ$, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ $ΒΓ$ τῇ $ΜΝ$. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $ΑΕ$ τῇ $ΕΜ$. ἡ δὲ $ΕΑ$ τῇ $ΕΝ$, ἡ ἄρα $ΑΔ$ ταῖς $ΜΕ$ $ΕΝ$ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' αἱ $ΜΕ$ $ΕΝ$ τῆς $ΜΝ$ μείζονές εἰσι, καὶ ἡ $ΑΔ$ ἄρα τῆς $ΜΝ$ μείζων ἐστίν. Ἰση δὲ ἡ $ΜΝ$ τῇ $ΒΓ$, ἡ $ΑΔ$ ἄρα τῆς $ΒΓ$ μείζων ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $ΜΕ$ $ΕΝ$ δυοὶ ταῖς $ΖΕ$ $ΕΗ$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΜΕΝ$ γωνίας τῆς ὑπὸ $ΖΕΗ$ μείζων ἐστὶ βάσις ἄρα ἡ $ΜΝ$ βάσεως τῆς $ΖΗ$ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ ἡ $ΜΝ$ τῇ $ΒΓ$ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ $ΒΓ$ ἄρα τῆς $ΖΗ$ μείζων ἐστίν. Μεγίστη μὲν ἄρα ἡ $ΑΔ$ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ $ΒΓ$ τῆς $ΖΗ$.

Ἐν κύκλῳ ἄρα μεγίστη . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιε.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς 16.
ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύ-
κλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐ-
θείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ
παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου
γωνία ἀπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου
μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

Ἐστω κύκλος ὁ $ABΓ$ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ Fig. 16.
διάμετρον τὴν AB . λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ A τῇ AB
πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ
κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ
 $\Delta Γ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\Delta Γ$.

Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ $\Delta Γ$, ἴση ἐστὶ καὶ γω-
νία ἡ ὑπὸ $\Delta A Γ$ γωνία τῇ ὑπὸ $A Γ \Delta$. Ὄρθὴ δὲ ἡ
ὑπὸ $\Delta A Γ$, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $A Γ \Delta$. τριγώνου δὲ
τοῦ $A Γ \Delta$ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ $\Delta A Γ$ $A Γ \Delta$ δυσὶν
ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ
ἀπὸ τοῦ A σημείου, τῇ BA πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη
ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ὅμοίως δὲ δείξομεν,
ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐκτὸς ἄρα.

Πιπτέτω ὡς ἡ ΔE . λέγω ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τό-
πον τῆς τε ΔE εὐθείας καὶ τῆς $Γ \Theta A$ περιφερείας
ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ $Z A$, καὶ
ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν $Z A$ κάθετος ἡ ΔH .

Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Delta H \Delta$, ἐλάττων δὲ
ὀρθῆς ἡ ὑπὸ $\Delta A H$. μείζων ἄρα ἡ $\Delta \Delta$ τῆς ΔH . Ἰση
δὲ ἡ $\Delta \Delta$ τῇ $\Delta \Theta$. μείζων ἄρα ἡ $\Delta \Theta$ τῆς ΔH , ἢ ἐλάτ-
των τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα εἰς
τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφε-
ρείας ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς $ΒΑ$ εὐθείας καὶ τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας ἀπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας καὶ τῆς $ΑΕ$ εὐθείας ἀπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἔστι τις γωνία εὐθύγραμμος μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $ΒΑ$ εὐθείας καὶ τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας καὶ τῆς $ΑΕ$ εὐθείας· εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε $ΓΘΑ$ περιφερείας καὶ τῆς $ΑΕ$ εὐθείας εὐθεῖα παρεμπεσεῖται, ἥτις ποιήσῃ μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $ΒΑ$ εὐθείας καὶ τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας καὶ τῆς $ΑΕ$ εὐθείας. Οὐ παρεμπίπτει δὲ οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τε τῆς $ΒΑ$ εὐθείας καὶ τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας ἔσται μείζων ὀξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη. οὐδὲ μὴν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $ΓΘΑ$ περιφερείας καὶ τῆς $ΑΕ$ εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον· ἐπεὶ δὴ περ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη.

Πρότασις κ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 17.

Ἐστω τὸ μὲν δοθέν σημεῖον τὸ A , ὃ δὲ δοθεὶς *Fig. 17.* κύκλος ὁ $BΓΔ$. δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ A σημείου τοῦ $BΓΔ$ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεΐαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ E , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AE , καὶ κέντρῳ μὲν τῷ E διαστήματι δὲ τῷ EA κύκλος γεγράφθω ὁ AZH , καὶ ἀπὸ τοῦ A τῇ EA πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ AZ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EBZ AB . λέγω ὅτι ἀπὸ τοῦ A σημείου τοῦ $BΓΔ$ κύκλου ἐφαπτομένη ἦται ἡ AB .

Ἐπεὶ γὰρ τὸ E κέντρον ἐστὶ τῶν $BΓΔ$ AZH κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν EA τῇ EZ , ἡ δὲ EA τῇ EB . δύο δὴ αἱ AE EB δυσὶ ταῖς ZE EA ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι, τὴν πρὸς τῷ E . βάσεις ἄρα ἡ AZ βάσει τῇ AB ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ $EΔZ$ τρίγωνον τῷ EBA τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $EΔZ$ τῇ ὑπὸ EBA . Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ $EΔZ$, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ EBA . Καὶ ἐστὶν ἡ EB ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. ἡ AB ἄρα ἐφάπτεται τοῦ $BΓΔ$ κύκλου.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ A τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ $BΓΔ$ ἐφαπτομένη εὐθεΐα γραμμὴ ἦται ἡ AB . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιη.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεΐα, ἀπὸ *18.* δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεΐα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Κύκλου γὰρ τοῦ $ABΓ$ ἐφαπτέσθω τις εὐθεΐα *Fig. 18.* ἡ $ΔE$ κατὰ τὸ $Γ$ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $ABΓ$ κύκλου τὸ Z , καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ $Γ$

ἐπεζεύχθω ἡ $ZΓ$. λέγω ὅτι ἡ $ZΓ$ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν $ΔΕ$.

Εἰ γὰρ μή· ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὴν $ΔΕ$ κάθετος ἡ $ZΗ$.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ $ZΗΓ$ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὁξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ZΓΗ$. ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα ἡ $ZΓ$ τῆς $ZΗ$. Ἰση δὲ ἡ $ZΓ$ τῇ $ZΒ$. μείζων ἄρα καὶ ἡ $ZΒ$ τῆς $ZΗ$, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ $ZΗ$ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν $ΔΕ$. Ὅμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς $ZΓ$ ἡ $ZΓ$ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν $ΔΕ$.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ 19.
δὲ τῆς ἀφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ $ΑΒΓ$ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ $ΔΕ$ κατὰ τὸ $Γ$ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ $Γ$ τῇ $ΔΕ$ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $ΓΑ$. λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς $ΑΓ$ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Fig. 19.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΓΖ$.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ $ΑΒΓ$ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ $ΔΕ$, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπέζευκται ἡ $ZΓ$, ἡ $ZΓ$ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν $ΔΕ$. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ZΓΕ$. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓΕ$ ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ZΓΕ$ τῇ ὑπὸ $ΑΓΕ$, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Z κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου. Ὅμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν ἐπὶ τῆς $ΑΓ$.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ'.

Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλα- 20.
σίῳν ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν
αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Ἐστω κύκλος ὁ $ABΓ$, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ *Fig. 20.*
αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ $BEΓ$, πρὸς δὲ τῇ περιφε-
ρείᾳ ἡ ὑπὸ $BAΓ$, ἐκέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέ-
ρειαν βάσιν τὴν $BΓ$. λέγω ὅτι διπλασίῳν ἐστὶν ἡ
ὑπὸ $BEΓ$ γωνία τῆς ὑπὸ $BAΓ$.

Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ AE διήχθῃ ἐπὶ τὸ Z .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ EA τῇ EB , καὶ γωνία ἡ
ὑπὸ EAB τῇ ὑπὸ EBA ἴση ἐστίν· αἱ ἄρα ὑπὸ EAB
 EBA γωνίαι τῆς ὑπὸ EAB διπλάσιαί εἰσιν. Ἰση δὲ
ἡ ὑπὸ BEZ ταῖς ὑπὸ EAB EBA · καὶ ἡ ὑπὸ BEZ
ἄρα τῆς ὑπὸ EAB ἐστὶ διπλῇ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ
ἡ ὑπὸ $ZEΓ$ τῆς ὑπὸ EAG ἐστὶ διπλῇ· ὅλη ἄρα ἡ
ὑπὸ $BEΓ$ ὅλης τῆς ὑπὸ $BAΓ$ ἐστὶ διπλῇ.

Κεκλάσθῃ δὲ πάλιν, καὶ ἔστω ἑτέρα γωνία ἡ
ὑπὸ $BAΓ$, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ AE ἐκβεβλήσθῃ ἐπὶ
τὸ H . Ὅμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι διπλῇ ἐστὶν ἡ ὑπὸ
 $HEΓ$ γωνία τῆς ὑπὸ EAG , ὥν ἡ ὑπὸ HEB διπλῇ
ἐστὶ τῆς ὑπὸ EAB · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $BEΓ$ διπλῇ
ἐστὶ τῆς ὑπὸ $BAΓ$.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ . . . καὶ τὰ
ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κα.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι 21.
ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐστω κύκλος ὁ $ABΓΔ$, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι *Fig. 21.*
τῷ $BAEA$ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ $BAΔ$ $BEΔ$ · λέγω
ὅτι αἱ ὑπὸ $BAΔ$ $BEΔ$ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήφθω γάρ τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BZ $ZΔ$.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ $BZΔ$ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ $ΒΑΔ$ πρὸς τῇ περιφέρειᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν $ΒΓΔ$. ἡ ἄρα ὑπὸ $BZΔ$ γωνία διπλασίῳ ἐστὶ τῆς ὑπὸ $ΒΑΔ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ $BZΔ$ καὶ τῆς ὑπὸ $ΒΕΔ$ ἐστὶ διπλασίῳ. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΒΑΔ$ τῇ ὑπὸ $ΒΕΔ$.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ 22. ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐστω κύκλος ὁ $ABΓΔ$, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ $ABΓΔ$. λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Fig. 22.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΑΓ$ $ΒΔ$.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ $ABΓ$ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ $ΓΑΒ$ $ABΓ$ $ΒΓΑ$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἰση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ $ΓΑΒ$ τῇ ὑπὸ $ΒΔΓ$, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ $ΒΑΔΓ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΑΔΒ$, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ $ΑΔΓΒ$. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΔΓ$ ταῖς ὑπὸ $ΒΑΓ$ $ΑΓΒ$ ἴση ἐστί. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $ABΓ$. αἱ ἄρα ὑπὸ $ABΓ$ $ΒΑΓ$ $ΑΓΒ$ ταῖς ὑπὸ $ABΓ$ $ΑΔΓ$ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ $ABΓ$ $ΒΑΓ$ $ΑΓΒ$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. καὶ αἱ ὑπὸ $ABΓ$ $ΑΔΓ$ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὅμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ $ΒΑΔ$ $ΔΓΒ$ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κγ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα 23.
κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται
ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB Fig. 23.
δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστάτω
ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ AGB ADB , καὶ διήχθω ἡ
 $AG\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ GB ΔB .

Ἐπεὶ οὖν ὁμοίων ἐστὶ τὸ AGB τμήμα τῷ ADB
τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα
γωνίας ἴσας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ AGB γωνία τῇ
ὑπὸ ADB , ἢ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα ...
καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κδ.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα 24.
κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστῶσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν AB $\Gamma\Delta$ Fig. 24.
ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ AEB $\Gamma Z\Delta$ · λέγω ὅτι ἴσον
ἐστὶ τὸ AEB τμήμα τῷ $\Gamma Z\Delta$ τμήματι.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ AEB τμήματος ἐπὶ
τὸ $\Gamma Z\Delta$, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν A σημείου ἐπὶ τὸ
 Γ , τῆς δὲ AB εὐθείας ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$, ἐφαρμόσει καὶ
τὸ B σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, διὰ τὸ ἴσην εἶναι
τὴν AB τῇ $\Gamma\Delta$ · τῆς δὲ AB ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$ ἐφαρμοσά-
σης, ἐφαρμόσει καὶ τὸ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ $\Gamma Z\Delta$.
Εἰ γὰρ ἡ AB εὐθεῖα ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ
 AEB τμήμα ἐπὶ τὸ $\Gamma Z\Delta$ μὴ ἐφαρμόσει, ἥτοι ἐντὸς
αὐτοῦ πεσεῖται, ἢ ἐκτὸς (ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον διὰ τὸ ἐπὶ
τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συ-
σταθῆναι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη) ἢ παραλλάξει ὡς τὸ $\Gamma\Theta H\Delta$,
κύκλος δὲ κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ

δύο, ἀλλὰ καὶ τέμνει ὁ $\Gamma\Theta\text{Η}\Delta$ τὸν $\Gamma\text{Ζ}\Delta$ κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο τὰ $\Gamma\text{Η}\Delta$, ὅπερ ἐστὶ πάλιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς AB εὐθείας ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ $ΑΕΒ$ τμήμα ἐπὶ τὸ $\Gamma\text{Ζ}\Delta$. ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κς.

Κύκλου τμήματος δοθέντος προσανα- 25.
γράψαι τὸν κύκλον αὐπέρ ἐστι τμήμα.

Ἐστω τὸ δοθέν τμήμα κύκλου τὸ $AB\Gamma$. δεῖ δὴ Fig. 25.
τοῦ $AB\Gamma$ τμήματος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὐπέρ
ἐστι τμήμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ $ΑΓ$ δίχα κατὰ τὸ Δ , καὶ ἤχ-
θω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ $ΑΓ$ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔB ,
καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AB . ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνία ἄρα τῆς
ὑπὸ $BA\Delta$ ἥτοι μείζων ἐστίν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων.

Ἐστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ
 BA εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ
 $AB\Delta$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAE , καὶ διήχθω ἡ ΔB ἐπὶ
τὸ E , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΕΓ$. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ
ὑπὸ ABE γωνία τῇ ὑπὸ BAE , ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ
 BE εὐθεῖα τῇ $ΕΑ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΔ$ τῇ
 $\Delta Γ$, κοινὴ δὲ ἡ ΔE , δύο δὴ αἱ $ΑΔ \Delta E$ δυοὶ ταῖς
 $\Gamma\Delta \Delta E$ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ
 $ΑΔ E$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Gamma\Delta E$ ἴση ἐστίν, ὀρθὴ γὰρ ἑκα-
τέρα βάσις ἄρα ἡ AE βάσει τῇ ΓE ἴση ἐστίν.
Ἀλλὰ ἡ AE τῇ BE ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ BE ἄρα τῇ
 ΓE ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ $AE EB ΕΓ$ ἴσαι
ἀλλήλαις εἰσὶν· ὁ ἄρα κέντρον τῷ E διαστήματι δὲ
ἐνὶ τῶν $AE EB ΕΓ$ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ
διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται προσαναγεγραμ-
μένος. Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέ-

γραφται ὁ κύκλος. Καὶ δῆλον ὡς τὸ $ABΓ$ τμήμα ἑλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, διὰ τὸ τὸ E κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ τυγχάνειν.

Ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ $ABΔ$ γωνία ἴση ᾖ τῇ ὑπὸ $BAΔ$. τῆς $ΔΔ$ ἴσης γενομένης ἑκατέρω τῶν $BA ΔΓ$, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ $ΔΑ ΔΒ ΔΓ$ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ $Δ$ κέντρον τοῦ προσαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ $ABΓ$ ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ $ABΔ$ ἐλάττων ᾖ τῆς ὑπὸ $BAΔ$, καὶ συστησώμεθα πρὸς τῇ BA εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ $ABΔ$ γωνία ἴσην. ἐντὸς τοῦ $ABΓ$ τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς AB , ὡς τὸ E , καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ $ABΓ$ τμήμα μείζον ἡμικυκλίου.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος, οὐπὲρ ἐστὶ τὸ τμήμα ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κς.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι 26.
ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάντε
πρὸς τοῖς κέντροις ἐάντε πρὸς ταῖς περιφε-
ρείαις ὡς ἰβεβηκνῶσι.

Ἐστωσαν γὰρ ἴσοι κύκλοι οἱ $ABΓ ΔΕΖ$ καὶ ἐν Fig. 26.
αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν πρὸς μὲν τοῖς κέντροις
αἱ ὑπὸ $BΗΓ ΕΘΖ$, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ
 $BAΓ ΕΔΖ$. λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $BΚΓ$ περιφέρεια
τῇ $ΕΔΖ$ περιφερείᾳ.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $BΓ ΕΖ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ $ABΓ ΔΕΖ$ κύκλοι, ἴσαι
εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δὴ αἱ $BΗ ΗΓ$ δυσὲ
ταῖς $ΕΘ ΘΖ$ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ $Η$ γω-
νία τῇ πρὸς τῷ $Θ$ ἴση ἐστὶ. βάσις ἄρα ἡ $BΓ$ βάσει
τῇ $ΕΖ$ ἴση ἐστὶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ A

γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ , ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ BAG τμήμα τῷ $E\Delta Z$ τμήματι, καὶ ἐστὶν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν BG EZ . τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ BAG τμήμα τῷ $E\Delta Z$ τμήματι. Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ ABG κύκλος ὅλῳ τῷ ΔEZ κύκλῳ ἴσος· λοιπὴ ἄρα ἡ BKG περιφέρειά ἐστὶν ἴση τῇ $E\Delta Z$ περιφερείᾳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι . . . καὶ τὰ ἕξῃς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κζ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐὰν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐὰν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὧσι βεβηκυῖαι. 27.

Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ABG ΔEZ ἐπὶ ἴσων Fig. 27. περιφερειῶν τῶν BG EZ πρὸς μὲν τοῖς H Θ κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ὑπὸ BHG $E\Theta Z$, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ BAG $E\Delta Z$. λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ BHG γωνία τῇ ὑπὸ $E\Theta Z$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ BAG τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ BHG τῇ ὑπὸ $E\Theta Z$, μία αὐτῶν μείζων ἔσται. Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ BHG , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ BH εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ H τῇ ὑπὸ $E\Theta Z$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BHK . αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὧσιν· ἴση ἄρα ἡ BK περιφέρεια τῇ EZ περιφερείᾳ. Ἀλλ' ἡ EZ τῇ BG ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ BK ἄρα τῇ BG ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ BHG γωνία τῇ ὑπὸ $E\Theta Z$. ἴση ἄρα. Καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ BHG ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ A , τῆς δὲ ὑπὸ $E\Theta Z$ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Δ . ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ A γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ .

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ . . . καὶ τὰ ἐξῆς
ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κή.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι 28.
ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μεί-
ζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάτ-
τονι.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ $ABΓ$ $ΔΕΖ$, καὶ ἐν αὐ- Fig. 28.
τοῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ $ΒΓ$ $ΕΖ$ τὰς μὲν $ΒΑΓ$
 $ΕΔΖ$ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦσαι τὰς δὲ $ΒΗΓ$
 $ΕΘΖ$ ἐλάττονας· λέγω ὅτι ἡ μὲν $ΒΑΓ$ μείζων περι-
φέρεια ἴση ἐστὶ τῇ $ΕΔΖ$ μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ
 $ΒΗΓ$ ἐλάττων περιφέρεια τῇ $ΕΘΖ$ ἐλάττονι.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ $Κ$ $Λ$,
καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΒΚ$ $ΚΓ$ $ΕΛ$ $ΛΖ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ
τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ $ΒΚ$ $ΚΓ$ δυοὶ ταῖς $ΕΛ$ $ΛΖ$
ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ $ΒΓ$ βάσει τῇ $ΕΖ$ ἴση· γωνία
ἄρα ἡ ὑπὸ $ΒΚΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΛΖ$ ἴση ἐστίν. Αἱ
δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν
πρὸς τοῖς κέντροις ᾧσιν· ἴση ἄρα ἡ $ΒΗΓ$ περιφέρεια
τῇ $ΕΘΖ$ περιφερείᾳ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ $ΑΒΓ$
κύκλος ὅλῳ τῷ $ΔΕΖ$ κύκλῳ ἴσος· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ
 $ΒΑΓ$ περιφέρεια λοιπῇ τῇ $ΕΔΖ$ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι . . . καὶ τὰ
ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κθ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας πε- 29.
ριφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ $ΑΒΓ$ $ΔΕΖ$, καὶ ἐν αὐ- Fig. 29.
τοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ $ΒΗΓ$ $ΕΘΖ$,

καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $BΓ$ EZ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $BΓ$ εὐθεῖα τῇ EZ .

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ K $Λ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BK $KΓ$ $ΕΛ$ $ΛΖ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $BΗΓ$ περιφέρεια τῇ $ΕΘΖ$ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BKΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΛΖ$. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ $ΑΒΓ$ $ΔΕΖ$ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ BK $KΓ$ δυοὶ ταῖς $ΕΛ$ $ΛΖ$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ $BΓ$ βάσει τῇ EZ ἴση ἐστίν.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν. 30.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ $ΑΔΒ$ · δεῖ δὴ Fig. 30. τὴν $ΑΔΒ$ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἐπεζεύχθω ἡ $ΑΒ$, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ $Γ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Γ$ σημείου τῇ $ΑΒ$ εὐθείᾳ πρὸς ὁρθὰς ἤχθω ἡ $ΓΔ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΑΔ$ $ΔΒ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΒ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΓΔ$ · δύο δὴ αἱ $ΑΓ$ $ΓΔ$ δυοὶ ταῖς $ΒΓ$ $ΓΔ$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΓΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΓΔ$ ἴση, ὁρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ $ΑΔ$ βάσει τῇ $ΔΒ$ ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν $ΑΔ$ $ΔΒ$ περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ $ΑΔ$ περιφέρεια τῇ $ΔΒ$ περιφερείᾳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται κατὰ τὸ $Δ$ σημεῖον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λδ.

Ἐν κύκλῳ ἢ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία 31.
ὀρθή ἐστίν, ἢ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι
ἐλάττων ὀρθῆς, ἢ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμή-
ματι μείζων ὀρθῆς· καὶ ἐτι ἢ μὲν τοῦ μεί-
ζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς,
ἢ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάτ-
των ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐστω κύκλος ὁ $ΑΒΓΔ$. διάμετρος δὲ αὐτοῦ Fig. 31.
ἔστω ἡ $ΒΓ$, κέντρον δὲ τὸ $Ε$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ
 $ΒΑ ΑΓ ΑΔ ΔΓ$. λέγω ὅτι ἢ μὲν ἐν τῷ $ΒΑΓ$ ἡμι-
κυκλίῳ γωνία ἢ ὑπὸ $ΒΑΓ$ ὀρθή ἐστίν, ἢ δὲ ἐν τῷ
 $ΑΒΓ$ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἢ ὑπὸ
 $ΑΒΓ$ ἐλάττων ὀρθῆς· ἢ δὲ ἐν τῷ $ΑΔΓ$ ἐλάττονι
τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἢ ὑπὸ $ΑΔΓ$ μείζων
ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐπεζεύχθω ἡ $ΑΕ$, καὶ διήχθω ἡ $ΒΑ$ ἐπὶ τὸ $Ζ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΕ$ τῇ $ΕΑ$, ἴση ἐστὶ καὶ
γωνία ἢ ὑπὸ $ΕΑΒ$ τῇ ὑπὸ $ΕΒΑ$. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση
ἐστὶν ἡ $ΕΑ$ τῇ $ΕΓ$, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓΕ$ τῇ
ὑπὸ $ΓΑΕ$. ὅλη ἄρα ἢ ὑπὸ $ΒΑΓ$ δυσὶ ταῖς ὑπὸ $ΑΒΓ$
 $ΑΓΒ$ ἴση ἐστίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΖΑΓ$ ἐκτὸς
τοῦ $ΑΒΓ$ τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ $ΑΒΓ$ $ΑΓΒ$ γω-
νίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ
 $ΖΑΓ$, ὀρθή ἄρα ἑκατέρα· ἢ ἄρα ἐν τῷ $ΒΑΓ$ ἡμι-
κυκλίῳ γωνία ἢ ὑπὸ $ΒΑΓ$ ὀρθή ἐστὶ.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ $ΑΒΓ$ τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ
 $ΑΒΓ$ $ΒΑΓ$ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθή δὲ ἢ
ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία· ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἢ ὑπὸ
 $ΑΒΓ$ γωνία, καὶ ἔστιν ἐν τῷ $ΑΒΓ$ μείζονι τοῦ ἡμι-
κυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔ$,
τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον
γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ $ΑΒΓ$

$\Delta\Delta\Gamma$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Καί ἐστιν ἡ ὑπὸ $\Delta\Delta\Gamma$ ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta\Delta\Gamma$ γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἐν τῷ $\Delta\Delta\Gamma$ ἐλαττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς $\Delta\Delta\Gamma$ περιφερείας καὶ τῆς $\Delta\Gamma$ εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς $\Delta\Delta\Gamma$ περιφερείας καὶ τῆς $\Delta\Gamma$ εὐθείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Καί ἐστιν αὐτόθεν φανέρον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν $\Delta\Delta$ $\Delta\Gamma$ εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθὴ γωνία ἐστὶν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς $\Delta\Delta\Gamma$ περιφερείας καὶ τῆς $\Delta\Gamma$ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν $\Delta\Gamma$ $\Delta\Delta$ εὐθειῶν ὀρθὴ ἐστὶν· ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ εὐθείας καὶ τῆς $\Delta\Delta\Gamma$ περιφερείας περιεχομένη ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ μὲν ἐν τῷ . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανέρον, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία γωνία ταῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθὴ ἐστὶν ἡ γωνία· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐφεξῆς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Ὅταν δὲ αἱ ἐφεξῆς ἴσαι ᾖσιν, ὀρθαί εἰσιν.

Πρότασις ιβ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ 32.
δὲ τῆς ἀφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐ-
θεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον· ἃς ποιεῖ γωνίας
πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν
τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου γὰρ τοῦ $\Delta\Delta\Gamma\Delta$ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα Fig. 32.
ἡ $E\Delta$ κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου
διήχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν $\Delta\Delta\Gamma\Delta$ κύκλον τέμνουσα

αὐτὸν ἢ $ΒΔ$ · λέγω ὅτι ὡς ποιεῖ γωνίας ἡ $ΒΔ$ μετὰ τῆς $ΕΖ$ ἐφαπτομένης, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις, τοῦτ' ἔστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ $ΖΒΔ$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ $ΔΑΒ$ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ $ΕΒΔ$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ $ΔΓΒ$ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ $Β$ τῇ $ΕΖ$ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΒΑ$, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς $ΒΔ$ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ $Γ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΑΔ$ $ΔΓ$ $ΓΒ$.

Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ $ΑΒΓΔ$ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ $ΕΖ$ κατὰ τὸ $Β$ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ $Β$ ἀφῆς ἦκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΒΑ$, ἐπὶ τῆς $ΒΑ$ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου. Ἡ $ΒΑ$ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου· ἡ ἄρα ὑπὸ $ΑΔΒ$ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὔσα ὀρθή ἐστὶ· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ $ΒΑΔ$ $ΑΒΔ$ μᾶ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΒΖ$ ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ $ΑΒΖ$ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ $ΒΑΔ$ $ΑΒΔ$. Κοινὴ ἀφηγήσθω ἡ ὑπὸ $ΑΒΔ$ · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΔΒΖ$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ $ΒΑΔ$. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ $ΑΒΓΔ$, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ $ΔΒΖ$ $ΔΒΕ$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ $ΔΒΖ$ $ΔΒΕ$ ταῖς ὑπὸ $ΒΑΔ$ $ΒΓΔ$ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ $ΒΑΔ$ τῇ ὑπὸ $ΔΒΖ$ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΔΒΕ$ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ $ΔΓΒ$, τῇ ὑπὸ $ΔΓΒ$ γωνίᾳ, ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηται τις . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμημα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. 33.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , ἡ δὲ δοθεῖσα *Fig. 33.* γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ . δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς AB γράψαι τμημα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ .

Ἡ γὰρ πρὸς τῷ Γ γωνία ἥτοι ὀξεῖά ἐστιν, ἢ ὀρθή, ἢ ἀμβλεῖα· ἔστω πρότερον ὀξεῖα, ὥς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ A σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAD ὀξεῖα ἅρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ BAD . Καὶ ἤχθω τῇ AD ἀπὸ τοῦ A σημείου πρὸς ὀρθὰς ἡ AE , καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ ZH , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HB .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB , κοινὴ δὲ ἡ ZH , δύο δὴ αἱ AZ ZH δυοῖ ταῖς ZB ZH ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AZH γωνία τῇ ὑπὸ BZH ἴση· βάσις ἅρα ἡ AH βάσει τῇ BH ἴση ἐστίν. Ὁ ἅρα κέντρον μὲν τῷ H διαστήματι δὲ τῷ HA κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ B . Γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ABE , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BE . Ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἄκρας τῆς AE διαμέτρου, ἀπὸ τοῦ A , τῇ AE πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ AD , ἡ AD ἅρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ABE ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ AD , καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A ἀφῆς εἰς τὸ ABE κύκλον δίηκται τις εὐθεῖα ἡ AB · ἡ ἅρα ὑπὸ DAB γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ AEB . Ἀλλ' ἡ ὑπὸ DAB τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἅρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ AEB .

Ἐπὶ

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τμήμα κύκλου γέγραπται τὸ AEB , δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ AEB ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ .

Ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Γ · καὶ δεῖον πάλιν ἔστω ἐπὶ τῆς AB γράψαι τμήμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ. Συνεστήτω γὰρ πάλιν τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAD , ὥς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z , καὶ κέντρον μὲν τῷ Z , διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν ZA ZB , κύκλος γεγράφθω ὁ AEB .

Ἐφάπτεται ἄρα ἡ AD εὐθεῖα τοῦ AEB κύκλου, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ A γωνίαν. Καὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ BAD γωνία τῇ ἐν τῷ AEB τμήματι, ὀρθὴ γὰρ καὶ αὕτη ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ BAD τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστί. Καὶ ἡ ἐν τῷ AEB τμήματι ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ .

Γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς AB τμήμα κύκλου τὸ AEB , δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ .

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεία ἔστω· καὶ συνεστήτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ A σημείῳ ἡ ὑπὸ BAD , ὥς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ AD πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ AE , καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z , καὶ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ZH , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HB .

Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB , καὶ κοινὴ ἡ ZH , δύο δὴ αἱ AZ ZH δυοὶ ταῖς BZ ZH ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AZH γωνία τῇ ὑπὸ BZH ἴση· βάσις ἄρα ἡ AH βάσει τῇ BH ἴση ἐστίν. Ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ H διαστήματι δὲ τῷ HA κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ B . Οἰχέσθω ὥς ὁ AEB . Καὶ ἐπεὶ τῇ AE διαμέτρῳ ἀπ' ἁπλᾶς πρὸς ὀρθὰς ἤκται ἡ AD , ἡ AD ἄρα ἐφάπτεται τοῦ AEB κύκλου. Καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς διῆκται ἡ

AB ἡ ἄρα ὑπὸ BAD γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ $A\theta B$ συνισταμένη γωνία. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ BAD γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστὶ· καὶ ἡ ἐν τῷ $A\theta B$ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ .

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB γέγραπται τμήμα κύκλου τὸ $A\theta B$, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις 18.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμήμα ἀφελεῖν 34.
δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἐστώ ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $AB\Gamma$, ἡ δὲ δοθείσα Fig. 34
γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ · δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου τμήμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ .

Ἦχθω τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ EZ κατὰ τὸ B σημεῖον, καὶ συνεστώτω πρὸς τῇ EZ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ B τῇ πρὸς τῷ Δ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ $ZB\Gamma$.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ $AB\Gamma$ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ EZ , καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ B ἐπαφῆς διῆκται ἡ $B\Gamma$ ἡ ὑπὸ $ZB\Gamma$ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ $BA\Gamma$ ἐναλλάξ τμήματι συνισταμένη γωνίᾳ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ $ZB\Gamma$ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ $BA\Gamma$ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ $AB\Gamma$ τμήμα ἀφίρηται τὸ $BA\Gamma$, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις 19.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν 35.
ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν πῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ

τῶν τῆς ἐτέρας τμημάτων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Ἐν γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ $ΑΒΓΔ$ δύο εὐθεῖαι αἱ $ΑΓ$ $ΒΔ$ Fig. 35. τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ $Ε$ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΕ$ $ΕΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΔΕ$ $ΕΒ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εἰ μὲν οὖν αἱ $ΑΓ$ $ΒΔ$ διὰ τοῦ κέντρου εἰσιν, ὥστε τὸ $Ε$ κέντρον εἶναι τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου· φανερόν ὅτι, ἴσων οὖσῶν τῶν $ΑΕ$ $ΕΓ$ $ΔΕ$ $ΕΒ$, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΕ$ $ΕΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΔΕ$ $ΕΒ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐστωσαν δὴ αἱ $ΑΓ$ $ΔΒ$ μὴ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ $Ζ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Ζ$ ἐπὶ τὰς $ΑΓ$ $ΔΒ$ εὐθείας κἀθετοὶ ἤχθωσαν αἱ $ΖΗ$ $ΖΘ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΖΒ$ $ΖΓ$ $ΖΕ$.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ $ΖΗ$ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν $ΑΓ$ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ $ΑΗ$ τῇ $ΗΓ$. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ $ΑΓ$ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ $Η$, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ $Ε$, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΕ$ $ΕΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΗΕ$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΗΓ$. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς $ΗΖ$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΕ$ $ΕΓ$ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν $ΖΗ$ $ΗΕ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΓΗ$ $ΗΖ$. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $ΕΗ$ $ΗΖ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΕ$, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΓΗ$ $ΗΖ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΓ$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΕ$ $ΕΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΖΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΖΓ$. Ἰση δὲ ἡ $ΖΓ$ τῇ $ΖΒ$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΕ$ $ΕΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΖ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΖΒ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΔΕ$ $ΕΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΖΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΖΒ$.

Ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE EF μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZB . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AE EF μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AE EB μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE . Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ZE . λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν AE EF περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AE EB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι . . . καὶ τὰ ἐκῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λς.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς 36.
καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι
δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύ-
κλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται. ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης
τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανο-
μένης μεταξὺ τοῦτε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς
περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον
τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ $ABΓ$ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκ- Fig. 36.
τὸς τὸ Δ , καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν $ABΓ$ κύκλον
προσπίπτεωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ $\Delta ΓΑ$ $\Delta Β$. καὶ ἡ μὲν
 $\Delta ΓΑ$ τέμνῃ τὸν $ABΓ$ κύκλον, ἡ δὲ $\Delta Β$ ἐφαπτέσθω.
λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $\Delta Δ$ $\Delta Γ$ περιεχόμενον ὀρθογώ-
νιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $\Delta Β$ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα $\Delta ΓΑ$ ἦτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστίν, ἢ οὐ.
Ἐστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Z κέν-
τρον τοῦ $ABΓ$ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZB . ὀρθὴ
ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ZBΔ$. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ $ΑΓ$ δίχα
τέτμηται κατὰ τὸ Z , πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ $ΓΔ$. τὸ
ἄρα ὑπὸ τῶν $\Delta Δ$ $\Delta Γ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ZΓ$ ἴσον
ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ZΔ$. Ἴση δὲ ἡ $ZΓ$ τῇ ZB . τὸ ἄρα
ὑπὸ τῶν $\Delta Δ$ $\Delta Γ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZB ἴσον ἐστὶ
τῷ ἀπὸ τῆς $ZΔ$. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $ZΔ$ ἴσα ἐστὶ τὸ
ἀπὸ τῶν ZB $BΔ$, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ $ZBΔ$. τὸ ἄρα

ὑπὸ τῶν AA $ΔF$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZB ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ZB BA . Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ZB · λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν AA $ΔF$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἐφαπτομένης.

Ἀλλὰ δὴ ἡ $ΑΓΑ$ μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ $ABΓ$ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ E , καὶ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὴν $ΑΓ$ κἀθετος ἤχθω ἡ EZ , καὶ ἐπεξέχθωσαν αἱ EB $ΕΓ$ $ΕΔ$. ὁρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ EZA . Καὶ ἐπεὶ εὐθεΐα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ EZ εὐθεΐαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν $ΑΓ$ πρὸς ὁρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἡ AZ ἄρα τῇ $ZΓ$ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ εὐθεΐα ἡ $ΑΓ$ τέμνεται δίχα κατὰ τὸ Z σημεῖον, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ $ΓΔ$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AA $ΔF$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ZΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ZΔ$. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ZE · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AA $ΔF$ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν FZ ZE ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΔZ$ ZE . Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν FZ ZE ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$, ὁρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ EZF γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΔZ$ ZE ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΕΔ$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AA $ΔF$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΔ$. Ἰση δὲ ἡ $ΕΓ$ τῇ $ΕΒ$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AA $ΔF$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΒ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΔ$. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $ΕΔ$ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΕΒ$ BA , ὁρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ EBA γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AA $ΔF$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΒ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΕΒ$ BA . Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς $ΕΒ$ · λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν AA $ΔF$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB .

Ἐάν ἄρα κύκλου ληφθῇ τε . . . καὶ τὰ ἐκτὸς αὐτοῦ ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κς.

Ἐάν κύκλον ληφθῇ τε σημείον ἐκτὸς, 37.
ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσ-
πίπτωσι δύο εὐθεΐαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν

τέμνη τὸν κύκλον, ἢ δὲ προσπίπτῃ, ἢ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς τεμνοῦσας καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπίπτουσας ἢ πρὸςπίπτουσας ἐφάπτεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ $ABΓ$ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκ- Fig. 37.
τὸς τὸ A , καὶ ἀπὸ τοῦ A πρὸς τὸν $ABΓ$ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ $ΔΓΑ$ $ΔB$, καὶ ἡ μὲν $ΔΓΑ$ τεμνέτω τὸν κύκλον, ἢ δὲ $ΔB$ προσπιπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν $ΔΔ$ $ΔΓ$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $ΔB$ · λέγω ὅτι ἡ $ΔB$ ἐφάπτεται τοῦ $ABΓ$ κύκλου.

Ἦχθω γὰρ τοῦ $ABΓ$ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ $ΔE$, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $ABΓ$ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZE ZB ZA .

Ἡ ἄρα ὑπὸ $ZEΔ$ ὀρθή ἐστὶ· καὶ ἐπεὶ ἡ $ΔE$ ἐφάπτεται τοῦ $ABΓ$ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ $ΔΓΑ$ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΔΔ$ $ΔΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔE$. Ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν $ΔΔ$ $ΔΓ$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $ΔB$ · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΔE$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔB$ · ἴση ἄρα ἡ $ΔE$ τῇ $ΔB$. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ZE τῇ ZB ἴση· δύο δὲ αἱ $ΔE$ EZ δυσεταῖς $ΔB$ BZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ $ZΔ$ · γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΔEZ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔBZ$ ἐστὶν ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ $ΔEZ$ ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $ΔBZ$. Καὶ ἐστὶν ἡ BZ ἐκβαλλομένη διάμετρος, ἢ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἐγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ $ΔB$ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ $ABΓ$ κύκλου. (Ὅμοίως δὲ τὰ αὐτὰ δευ-
θῆσεται, καὶ τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς $ΔΓ$ τυγχάνη.)

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι . . . καὶ τὸ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ὕδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ τρίτου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

αποστολὴν

Θεορ.

α. Σχήμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύ- 1.
γραμμὸν ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη
τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἐκάστης
πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἄπτηται.

β. Σχήμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγρά- 2.
φεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ περιγρα-
φομένου ἐκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται
ἄπτηται.

γ. Σχήμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγρά- 3.
φεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφο-
μένου ἄπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

δ. Σχήμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον πε- 4.
ριγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ
περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφε-
ρείας.

ε. Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς σχῆμα λέγεται ἐγγρά- 5.
φεσθαι, ὅταν ἢ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης
πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἐφάπτηται.

ς. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγε- 6.
ται, ὅταν ἢ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης γωνίας
τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἄπτηται.

ζ. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν 7.
τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ τοῦ κύκλου.

Πρότασις α.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐ- 1.
θείᾳ μὴ μείζονι αὐτῇ τῆς τοῦ κύκλου δια-
μέτρου ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσασαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ΑΒΓ$, ἡ δὲ δοθείσα Fig. 1.
εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἢ $Δ$.
δεῖ δὴ εἰς τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον τῇ $Δ$ εὐθείᾳ ἴσην εὐ-
θεῖαν ἐναρμόσασαι.

Ἔχθω τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου διάμετρος ἡ $ΒΓ$. Εἰ
μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ τῇ $Δ$, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ
ἐπιταχθέν ἐνήρμοσται γὰρ εἰς τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον τῇ
 $Δ$ εὐθείᾳ ἴση ἡ $ΒΓ$. Εἰ δὲ οὐ μείζων ἐστὶν ἡ $ΒΓ$
τῆς $Δ$, καὶ κείσθω τῇ $Δ$ ἴση ἡ $ΓΕ$, καὶ κέντρῳ μὲν
τῷ $Γ$ διαστήματι δὲ τῷ $ΓΕ$ κύκλος γεγράφθω ὁ
 $ΕΑΖ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΓΑ$.

Ἐπεὶ οὖν τὸ $Γ$ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΕΖ$
κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΓΑ$ τῇ $ΓΕ$. Ἀλλὰ ἡ $ΓΕ$ τῇ
 $Δ$ ἐστὶν ἴση καὶ ἡ $ΓΑ$ ἄρα τῇ $Δ$ ἐστὶν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον, τὸν $ΑΒΓ$, τῇ δο-
θείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι αὐτῇ τῆς τοῦ κύκλου δια-
μέτρου, τῇ $Δ$, ἴση ἐνήρμοσται, ἡ $ΓΑ$. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις β.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τρι- 2.
γώνῳ ἰσαγώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ΑΒΓ$, τὸ δὲ δοθέν Fig. 2.
τρίγωνον τὸ $ΔΕΖ$. δεῖ δὴ εἰς τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον τῷ
 $ΔΕΖ$ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἔχθω τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ $ΗΑΘ$
κατὰ τὸ $Α$, καὶ συνεστήτω πρὸς τῇ $ΑΘ$ εὐθείᾳ καὶ
τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Α$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ γωνίᾳ ἴση
ἢ ὑπὸ $ΘΑΓ$. πάλιν, πρὸς τῇ $ΗΑ$ εὐθείᾳ καὶ τῷ
πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Α$ τῇ ὑπὸ $ΖΔΕ$ γωνίᾳ ἴση
ἢ ὑπὸ $ΗΑΒ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΒΓ$.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ $ABΓ$ ἐφάπτεται τις εὐ-
θεΐα ἡ $ΘAH$, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκ-
ταί τις εὐθεΐα ἡ $ΑΓ$. ἡ ἄρα ὑπὸ $ΘΑΓ$ ἴση ἐστὶ τῇ
ἐν τῷ ἐναλλὰς τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ
 $ABΓ$. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ $ΘΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ ἐστὶν ἴση
καὶ ἡ ὑπὸ $ABΓ$ ὅρα γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ ἐστὶν ἴση.
Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΖΔΕ$ ἐστὶν
ἴση, καὶ λοιπὴ ὅρα ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $ΕΖΔ$
ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ὅρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ
 $ΔΕΖ$ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν $ABΓ$ κύκλου.
Εἰς τὸν δοθέντα ὅρα κύκλον τῷ δοθέντι τρι-
γώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται ὅπερ ἔδει
ποῆσαι.

Πρότασις γ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι 3.
τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ABΓ$, τὸ δὲ δοθὲν Fig. 3.
τρίγωνον τὸ $ΔΕΖ$. δεῖ δὴ περὶ τὸν $ABΓ$ κύκλον τῷ
 $ΔΕΖ$ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐκβεβλήσθω ἡ EZ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ
τὰ H $Θ$ σημεία, καὶ εἰλήφθω τοῦ $ABΓ$ κύκλου
κέντρον τὸ K , καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν εὐθεΐα ἡ $ΚΒ$,
καὶ συνεστιάτω πρὸς τῇ $ΚΒ$ εὐθεΐᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐ-
τῇ σημείῳ τῷ K τῇ μὲν ὑπὸ $ΔΕΗ$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ
 $ΒΚΑ$, τῇ δὲ ὑπὸ $ΔΖΘ$ ἴση ἡ ὑπὸ $ΒΚΓ$, καὶ διὰ
τῶν A B $Γ$ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ $ABΓ$
κύκλου αἱ $ΑΜ$ $ΜΒΝ$ $ΝΓΔ$.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ $ABΓ$ κύκλου αἱ $ΑΜ$
 $ΜΝ$ $ΝΔ$ κατὰ τὰ A B $Γ$ σημεία, ἀπὸ δὲ τοῦ K
κέντρον ἐπὶ τὰ A B $Γ$ σημεία ἐπεζευγμένα εἰσὶν
αἱ $ΚΑ$ $ΚΒ$ $ΚΓ$. ὁρᾶται ὅρα εἶναι αἱ πρὸς ταῖς A B
 $Γ$ σημείοις γωνίαι. Καὶ ἐπεὶ τοῦ $ΑΜΒΚ$ τετρα-
πλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρεσιν ὁρᾶταις ἴσαι εἶναι,

(ἐπειδήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ $AMBK$ τετράπλευρον,) ὧν αἱ ὑπὸ MAK KBM γωνίαι δύο ὀρθαί· εἰσιν· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ AKB AMB δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔEH ΔEZ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ AKB AMB ταῖς ὑπὸ ΔEH ΔEZ ἴσαι εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ AKB τῇ ὑπὸ ΔEH ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AMB λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ANM τῇ ὑπὸ ΔZE ἐστὶν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ MAN λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστὶν ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔMN τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ, καὶ περιέγραπται περὶ τὸν $AB\Gamma$ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις δ.

Εἰς τὸ δοθέν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι. 4.

Ἐστὼ τὸ δοθέν τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ · δεῖ δὲ εἰς *Fig. 4.* τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$ AGB γωνίαι δίχα ταῖς BD GA εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις αἱ BD GA κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὰς AB $B\Gamma$ GA εὐθείας κάθετοι αἱ ΔE ΔZ ΔH .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$, δίχα γὰρ τέμνηται ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $BE\Delta$ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ $BZ\Delta$ ἴση, δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ $EB\Delta$ $ZB\Delta$ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μὲν πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, κοινὴν αὐτῶν τὴν $B\Delta$, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΔE τῇ ΔZ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΔH τῇ ΔZ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔE ΔZ ΔH

ἴσαι ἀλλήλαις εἶσιν· ὁ ἄρα κέντρον τῷ Δ καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν ΔE ΔZ ΔH κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάπεται τῶν AB BF $ΓA$ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς E Z H σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ τέμνῃ αὐτὰς, ἔσται ἢ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ὡς ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ κέντρον τῷ Δ διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΔE ΔZ ΔH γραφόμενος κύκλος τέμνει τὰς AB BF $ΓA$ εὐθείας· ἐφάπεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ $ABΓ$ τρίγωνον. Ἐγγεγράφω ὡς ZEH .

Εἰς ἄρα τὸ δοθέν τρίγωνον τὸ $ABΓ$ κύκλος ἐγγέγραπται ὁ EZH · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ε.

Περὶ τὸ δοθέν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι. 5.

Ἐστω τὸ δοθέν τρίγωνον τὸ $ABΓ$ · δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθέν τρίγωνον τὸ $ABΓ$ κύκλον περιγράψαι. Fig. 5.

Τετμήσθωσαν αἱ AB $ΑΓ$ εὐθεῖαι δίχα κατὰ τὰ Δ E σημεία, καὶ ἀπὸ τῶν Δ E σημείων ταῖς AB $ΑΓ$ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔZ EZ · συμπεσούνται δὲ ἥτοι ἐντὸς τοῦ $ABΓ$ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς BF εὐθείας, ἢ ἐκτὸς (τοῦ $ABΓ$ τριγώνου ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη) τῆς BF .

Συμμιστέτωσαν οὖν ἐντὸς πρότερον κατὰ τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZB $ZΓ$ ZA . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΒΔ$, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔZ βάσις· ἄρα ἡ AZ βᾶσις τῇ ZB ἴση ἐστὶν. Ὀμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ $ΓZ$ τῇ AZ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ZB τῇ $ZΓ$ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ZA ZB $ZΓ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ Z διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ZA ZB $ZΓ$ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται πε-

περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον. Περιγράφουσθω ὡς ὁ $AB\Gamma$.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔZ EZ συμπίπτουσιν ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ εὐθείας κατὰ τὸ Z , ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AZ . Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔZ EZ συμπίπτουσιν ἐκτὸς τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου (ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς $B\Gamma$) κατὰ τὸ Z πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ BZ ΓZ . Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ ΔB , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθῶς ἡ ΔZ βάσις ἄρα ἡ AZ βάσει τῇ ZB ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ $Z\Gamma$ τῇ ZA ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ZB τῇ $Z\Gamma$ ἐστὶν ἴση. ὁ ἄρα πάλιν κέντρον τῷ Z διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ZA ZB $Z\Gamma$ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον. Καὶ γεγράφθω ὡς ὁ $AB\Gamma$.

Περὶ τὸ δαδὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγράφεται ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π ὁ ρ ι σ μ α.

Καὶ φανερόν ὅτι, ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἢ ὑπὸ $B\Delta\Gamma$ γωνία ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα ἐλάττω ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἢ ὑπὸ $B\Delta\Gamma$ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστίν· ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ τριγώνου πίπτει, ἢ ὑπὸ $B\Delta\Gamma$ ἐν ἐλάττωι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. (Ὅστε καὶ ὅταν ἐλάττωι ὀρθῆς τυγχάνῃ ἢ ὑπὸ $B\Delta\Gamma$ γωνία, ἐκτὸς τοῦ τριγώνου συμπίπτουσιν αἱ ΔZ EZ · ὅταν δὲ ὀρθή, ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ · ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐκτὸς τῆς $B\Gamma$.)

Πρότασις ε.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον 6.
ἐγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ $AB\Gamma\Delta$. δεῖ δὴ εἰς τὸν Fig. 6.
 $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἦχθωσαν τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου δύο διάμετροι
πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ $ΑΓ ΒΔ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν
αἱ $ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΕ$ τῇ $ΕΔ$, κέντρον γὰρ
τὸ $Ε$, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΕΑ$. βάσις ἄρα
ἡ $ΑΒ$ βάσει τῇ $ΑΔ$ ἴση ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ
ἐκατέρα τῶν $ΒΓ ΓΔ$ ἐκατέρα τῶν $ΒΑ ΑΔ$ ἴση ἐστὶν.
ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔ$ τετράπλευρον. λέγω
δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΒΔ$ εὐθεῖα
διάμετρος ἐστὶ τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα
ἐστὶ τὸ $ΒΑΔ$. ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΒΑΔ$ γωνία. Διὰ τὰ
αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ $ΑΒΓ ΒΓΔ ΓΔΑ$ ὀρθὴ
ἐστὶν ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔ$ τετράπλευρον.
Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον. τετράγωνον ἄρα ἐστὶ.
Καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τὸν $ΑΒΓΔ$ τετρά-
γωνον ἐγγέγραπται τὸ $ΑΒΓΔ$. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ς.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον 7.
περιγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ $ΑΒΓΔ$. δεῖ δὴ περὶ Fig. 7.
τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἦχθωσαν τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου δύο διάμετροι
πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ $ΑΓ ΒΔ$, καὶ διὰ τῶν $Α Β$
 $Γ Δ$ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ $ΑΒΓΔ$
κύκλου αἱ $ΖΗ ΗΘ ΘΚ ΚΖ$.

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ $ΖΗ$ τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου,

ἀπὸ δὲ τοῦ E κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ A ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ EA , αἱ ἄρα πρὸς τῷ A γωνίαι ὀρθαί εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς B Γ Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ AEB γωνία, ἔστι δὲ ὀρθή καὶ ἡ ὑπὸ EBH παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $H\Theta$ τῇ AG . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ AG τῇ ZK παράλληλός ἐστιν. Ὡστε καὶ ἡ $H\Theta$ τῇ ZK ἐστὶ παράλληλος. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν HZ ΘK τῇ $B\Delta$ ἐστὶ παράλληλος. Παραλληλόγραμμα ἄρα ἐστὶ τὰ HK $H\Gamma$ AK ZB BK . ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν HZ τῇ ΘK , ἡ δὲ $H\Theta$ τῇ ZK . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ $B\Delta$, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν AG ἑκατέρα τῶν $H\Theta$ ZK ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ $B\Delta$ ἑκατέρα τῶν HZ ΘK . καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν $H\Theta$ ZK ἑκατέρα τῶν HZ ΘK ἐστὶν ἴση. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ZH\Theta K$ τετράπλευρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστὶ τὸ $HBEA$, καὶ ἐστὶν ὀρθή ἡ ὑπὸ AEB . ὀρθή ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ AHB . Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ K Z γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ZH\Theta K$ τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον. τετράγωνον ἄρα ἐστὶ. Καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις η.

Εἰς τὸ δοθέν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι. 8.

Ἐστω τὸ δοθέν τετράγωνον τὸ $AB\Gamma\Delta$. δεῖ δὴ εἰς τὸ $AB\Gamma\Delta$ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν AB AD δίχα κατὰ τὰ Z E σημεία, καὶ διὰ μὲν τοῦ E ὁποτέρου τῶν AB $\Gamma\Delta$ παράλληλος ἤχθω ἡ $E\Theta$, διὰ δὲ τοῦ Z ὁποτέρου

τῶν $ΑΔ$ $ΒΓ$ παράλληλος ἦχθω ἡ $ΖΚ$.· παράλληλό-
 γραμμον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν $ΑΚ$ $ΚΒ$ $ΑΘ$ $ΘΔ$
 $ΑΗ$ $ΗΓ$ $ΒΗ$ $ΗΔ$, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευ-
 ραὶ δηλονότι ἴσαι εἰσὶ.· Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΔ$
 τῇ $ΑΒ$, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν $ΑΔ$ ἡμίσεια ἡ $ΑΕ$,
 τῆς δὲ $ΑΒ$ ἡμίσεια ἡ $ΑΖ$, ἴση ἄρα καὶ ἡ $ΑΕ$
 τῇ $ΑΖ$.· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴσαι εἰσὶν, ἴση
 ἄρα καὶ ἡ $ΖΗ$ τῇ $ΗΕ$.· Ὁμοίως δὲ δείξομεν
 ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν $ΗΘ$ $ΗΚ$ ἑκατέρᾳ τῶν $ΖΗ$
 $ΗΕ$ ἐστὶν ἴση.· Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ $ΗΕ$ $ΗΖ$ $ΗΘ$
 $ΗΚ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν.· Ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ $Η$
 διαστήματι δὲ ἐν τῶν $ΗΕ$ $ΗΖ$ $ΗΘ$ $ΗΚ$ κύκλος
 γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ
 ἐφάπεται τῶν $ΑΒ$ $ΒΓ$ $ΓΔ$ $ΔΑ$ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὁρ-
 θὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς $Ε$ $Ζ$ $Θ$ $Κ$ γωνίας· εἰ γὰρ
 τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς $ΑΒ$ $ΒΓ$ $ΓΔ$ $ΔΑ$, ἢ τῇ διαμέτρῳ
 τοῦ κύκλου πρὸς ὁρθὰς ἀπ' ἑκρας ἀγομένη ἐντὸς
 πεσεῖται τοῦ κυκλοῦ, ὅπερ ἄτοπον.· ἐδείχθη.· Οὐκ
 ἄρα ὁ κέντρον μὲν τῷ $Η$ διαστήματι δὲ ἐν τῶν $ΗΕ$
 $ΗΖ$ $ΗΘ$ $ΗΚ$ κύκλος γραφόμενος τέμνει τὰς $ΑΒ$ $ΒΓ$
 $ΓΔ$ $ΔΑ$ εὐθείας.· Ἐφάπεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἐστὶ
 ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ $ΑΒΓΔ$ τετράγωνον.

Εἰς τὸ δοθέν ἄρα τετράγωνον κύκλος ἐγγέγραπ-
 ται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις θ'.

Περὶ τὸ δοθέν τετράγωνον κύκλον περι- 9.
 γράψαι.

Ἐστω τὸ δοθέν τετράγωνον τὸ $ΑΒΓΔ$.· δεῖ δὲ Fig. 9.
 περὶ τὸ $ΑΒΓΔ$ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐπιτευχθεῖσαι γὰρ αἱ $ΑΓ$ $ΒΔ$ τεμνέτωσαν ἀλ-
 λήλας κατὰ τὸ $Ε$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΔΑ$ τῇ $ΑΒ$, κοινὴ δὲ ἡ
 $ΑΓ$, δύο δὲ αἱ $ΔΑ$ $ΑΓ$ ὁσὶ ταῖς $ΒΑ$ $ΑΓ$ ἴσαι

εἰσὶ, καὶ βάσεις ἡ $\Delta\Gamma$ βάσει τῇ $B\Gamma$ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta\Delta\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $B\Delta\Gamma$ ἐστὶν ἴση· ἡ ἄρα ὑπὸ $\Delta\Delta B$ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς $\Delta\Gamma$. Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ $\Delta B\Gamma$ $B\Gamma\Delta$ $\Gamma\Delta\Delta$ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν $\Delta\Gamma$ ΔB εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Delta\Delta B$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Delta B\Gamma$, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ $\Delta\Delta B$ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ $\Delta\Delta\Gamma$, τῆς δὲ ὑπὸ $\Delta B\Gamma$ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ $\Delta\Gamma\Delta$ · καὶ ἡ ὑπὸ $\Delta\Delta B$ ἄρα τῇ ὑπὸ $\Delta\Gamma\Delta$ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $\Delta\Delta$ πλευρᾷ τῇ $\Delta\Gamma$ ἐστὶν ἴση. Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐκατέρα τῶν $\Delta\Delta$ $\Delta\Gamma$ εὐθειῶν ἐκατέρα τῶν $\Delta\Gamma$ $\Delta\Delta$ ἴση ἐστὶν. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ $\Delta\Delta$ $\Delta\Gamma$ $\Delta\Delta$ $\Delta\Gamma$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ Δ καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν $\Delta\Delta$ $\Delta\Gamma$ $\Delta\Delta$ $\Delta\Gamma$ κύκλος γραφόμενος ἔξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ $\Delta B\Gamma\Delta$ τετράγωνον. Περιγεγράφθω ὡς ὁ $\Delta B\Gamma\Delta$.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγεγράφεται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ι.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον 10.
ἐκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ AB , καὶ τετμήσθω κατὰ Fig. 10.
τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB $B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΓA τετραγώνῳ· καὶ κέντρον μὲν τῷ A διαστήματι δὲ τῷ AB κύκλος γεγράφθω ὁ $B\Delta E$ καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν $B\Delta E$ κύκλον τῇ $\Delta\Gamma$ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὖσῃ τῆς τοῦ $B\Delta E$ κύκλου διαμέτρου ἴση εὐθεῖα ἡ $B\Delta$ · καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\Delta\Delta$ $\Gamma\Delta$, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ $\Delta\Gamma\Delta$ τρίγωνον κύκλος ὁ $\Delta\Gamma\Delta$.

Καὶ

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB $BΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$, ἴση δὲ ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΒΔ$. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB $BΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$. Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ $ΑΓΔ$ εἴληπται τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ B , καὶ ἀπὸ τοῦ B πρὸς τὸν $ΑΓΔ$ κύκλον προσπεπτώκασιν δύο εὐθεῖαι αἱ $ΒΑ$ $ΒΔ$, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB $BΓ$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$. ἡ $ΒΔ$ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ $ΑΓΔ$ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ $ΒΔ$, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ $Δ$ ἐπαφῆς διῆκται ἡ $ΔΓ$. ἡ ἄρα ὑπὸ $ΒΔΓ$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $ΔΑΓ$. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΔΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΑΓ$, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $ΓΔΑ$. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ΒΔΑ$ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ $ΓΔΑ$ $ΔΑΓ$. Ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ $ΓΔΑ$ $ΔΑΓ$ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ $ΒΓΔ$. ἡ ἄρα ὑπὸ $ΒΔΑ$ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $ΒΓΔ$. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ $ΒΔΑ$ τῇ ὑπὸ $ΓΒΔ$ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ $ΔΑ$ τῇ $ΑΒ$ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ $ΔΒΑ$ τῇ ὑπὸ $ΒΓΔ$ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ $ΒΔΑ$ $ΔΒΑ$ $ΒΓΔ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΔΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΓΔ$, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ $ΒΔ$ πλευρᾷ τῇ $ΔΓ$. Ἀλλ' ἡ $ΒΔ$ τῇ $ΓΑ$ ὑπόκειται ἴση. καὶ ἡ $ΑΓ$ ἄρα τῇ $ΓΔ$ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΓΔΑ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΑΓ$ ἐστὶν ἴση. αἱ ἄρα ὑπὸ $ΓΔΑ$ $ΔΑΓ$ τῆς ὑπὸ $ΔΑΓ$ διπλασίους εἰσὶν. ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΓΔ$ ταῖς ὑπὸ $ΓΔΑ$ $ΔΑΓ$. καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΓΔ$ ἄρα τῆς ὑπὸ $ΔΑΓ$ ἐστὶ διπλῇ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ $ΒΓΔ$ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ $ΒΔΑ$ $ΔΒΑ$. καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ $ΒΔΑ$ $ΔΒΑ$ τῆς ὑπὸ $ΒΔΑ$ ἐστὶ διπλῇ.

Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνέσταται τὸ $ΑΔΒ$ ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ $ΔΒ$ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ια.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον 11.
ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ΑΒΓΔΕ$. δεῖ δὴ εἰς *Fig. 11.*
τὸν $ΑΒΓΔΕ$ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ
ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ $ΖΗΘ$, διπλα-
σίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς $Η Θ$ γωνιῶν
τῆς πρὸς τῷ $Ζ$, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $ΑΒΓΔΕ$
κύκλον τῷ $ΖΗΘ$ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ
 $ΑΓΔ$, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ $Ζ$ γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν
ὑπὸ $ΓΑΔ$, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς $Η Θ$ ἴσην
ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΑΓΔ ΓΔΑ$. καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν
ὑπὸ $ΑΓΔ ΓΔΑ$ τῆς ὑπὸ $ΓΑΔ$ ἐστὶ διπλῇ. Τε-
τμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΑΓΔ ΓΔΑ$ δίχα ὑπὸ
τῶν $ΓΕ ΔΒ$ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΑΒ ΒΓ$
 $ΔΕ ΕΑ$.

Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΑΓΔ ΓΔΑ$ γωνιῶν
διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $ΓΑΔ$, καὶ τετμημέναι εἰσὶ
δίχα ὑπὸ τῶν $ΓΕ ΔΒ$ εὐθειῶν. αἱ πέντε ἄρα γω-
νίαι αἱ ὑπὸ $ΔΑΓ ΑΓΕ ΕΓΔ ΓΔΒ ΒΔΑ$ ἴσαι ἀλ-
λήλαις εἰσὶν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφε-
ρειῶν βεβήκασιν. αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ $ΑΒ$
 $ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΑ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ὑπὸ δὲ τὰς
ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν. αἱ πέντε
ἄρα εὐθεῖαι αἱ $ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΑ$ ἴσαι ἀλλήλαις
εἰσὶν. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον.
Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΑΒ$ περι-
φέρεια τῇ $ΔΕ$ περιφερείᾳ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω
ἡ $ΒΓΔ$. ὅλη ἄρα ἡ $ΑΒΓΔ$ περιφέρεια ὅλη τῇ $ΕΔΓΒ$
περιφερείᾳ ἴση ἐστὶ. καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς
 $ΑΒΓΔ$ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΕΔ$, ἐπὶ δὲ τῆς
 $ΕΔΓΒ$ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΑΕ$ καὶ ἡ ὑπὸ
 $ΒΑΕ$ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΕΔ$ ἴση ἐστὶ. Διὰ τὰ

αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ $ABΓ$ $BΓΔ$ $ΓΔΕ$ γωνιῶν ἑκατέρω τῶν ὑπὸ $ΒΔΕ$ $ΑΕΔ$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓΔΕ$ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις β.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον 12. ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ $ABΓΔΕ$. δεῖ δὴ περὶ *Fig. 12* τὸν $ABΓΔΕ$ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεία, τὰ $A B Γ Δ E$, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς AB $BΓ$ $ΓΔ$ $ΔΕ$ $ΕΑ$ περιφερείας· καὶ διὰ τῶν $A B Γ Δ E$ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ $HΘ$ $ΘΚ$ $ΚΛ$ $ΛΜ$ $ΜΗ$, καὶ εἰλήφθω τοῦ $ABΓΔΕ$ κύκλου κέντρον τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZB ZK $ZΓ$ $ZΔ$.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν $ΚΛ$ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ $ABΓΔΕ$ κύκλου κατὰ τὸ $Γ$, ἀπὸ δὲ τοῦ Z κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ $Γ$ ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ $ZΓ$. ἡ $ZΓ$ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν $ΚΛ$. ὁρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρω τῶν πρὸς τῷ $Γ$ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς $B Δ$ σημείοις γωνίαι ὁρθαί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ὁρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ZΓΚ$ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ZK ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ZΓ$ $ΓΚ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ZB BK ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZK . ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν $ZΓ$ $ΓΚ$ τοῖς ἀπὸ τῶν ZB BK ἐστὶν ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς $ZΓ$ τῷ ἀπὸ τῆς ZB ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΚ$ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς BK ἴσον ἐστὶ, ἴση ἄρα ἡ $ΓΚ$ τῇ

BK. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ZB τῇ $ZΓ$, καὶ κοινὴ ἡ ZK ,
 δύο δὲ αἱ BZ ZK δυοὶ ταῖς $ΓΖ$ ZK ἴσαι εἰσὶ, καὶ βά-
 σεις ἡ BK βάσει τῇ $ΓΚ$ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν
 ὑπὸ BZK γωνία τῇ ὑπὸ $KZΓ$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ BKZ
 τῇ ὑπὸ $ZKΓ$. διπλὴ ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $BZΓ$
 τῆς ὑπὸ $KZΓ$, ἡ δὲ ὑπὸ $BKΓ$ τῆς ὑπὸ $ZKΓ$. Διὰ
 τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ $ΓΖΔ$ τῆς ὑπὸ $ΓΖΑ$ ἐστὶ δι-
 πλὴ, ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΔΔ$ τῆς ὑπὸ $ΓΔΖ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση
 ἐστὶν ἡ $BΓ$ περιφέρεια τῇ $ΓΔ$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία
 ἡ ὑπὸ $BZΓ$ τῇ ὑπὸ $ΓΖΔ$. Καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ
 $BZΓ$ τῆς ὑπὸ $KZΓ$ διπλὴ, ἡ δὲ ὑπὸ $ΔΖΓ$ διπλὴ
 τῆς ὑπὸ $ΛΖΓ$. ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $KZΓ$ τῇ ὑπὸ
 $ΔΖΓ$. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ZΓΚ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ZΓΔ$
 ἴση. Δύο δὲ τρίγωνα ἐστὶ τὰ $ZKΓ$ $ZΛΓ$ τὰς δύο
 γωνίας ταῖς δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκα-
 τέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινήν αὐ-
 τῶν τὴν $ZΓ$, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοι-
 παῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ
 λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν $KΓ$ εὐθεῖα τῇ $ΓΔ$, ἡ
 δὲ ὑπὸ $ZKΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ZΛΓ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση
 ἐστὶν ἡ $KΓ$ τῇ $ΓΔ$, διπλὴ ἄρα ἡ $ΚΔ$ τῆς $KΓ$.
 Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δευχθήσεται καὶ ἡ $ΘΚ$ τῆς BK
 διπλὴ. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἴση ἡ BK τῇ $KΓ$, καὶ
 ἐστὶ διπλὴ ἡ μὲν $ΚΔ$ τῆς $KΓ$ ἡ δὲ $ΘΚ$ τῆς BK ,
 καὶ ἡ $ΘΚ$ ἄρα τῇ $ΚΔ$ ἐστὶν ἴση. Ὀμοίως δὲ δειχ-
 θήσεται καὶ ἑκάστη τῶν $ΘΗ$ $ΗΜ$ $ΜΔ$ ἑκατέρα τῶν
 $ΘΚ$ $ΚΔ$ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΗΘΚΑΜ$
 πεντάγωνον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ
 ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ZKΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ZΛΓ$, καὶ
 ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ $ZKΓ$ διπλὴ ἡ ὑπὸ $ΘΚΔ$, τῆς
 δὲ ὑπὸ $ZΛΓ$ διπλὴ ἡ ὑπὸ $ΚΑΜ$ · καὶ ἡ ὑπὸ $ΘΚΔ$
 ἄρα τῇ ὑπὸ $ΚΑΜ$ ἐστὶν ἴση. Ὀμοίως δὲ δειχθή-
 σεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ $ΚΘΗ$ $ΘΗΜ$ $ΗΜΔ$ ἑκα-
 τέρα τῶν ὑπὸ $ΘΚΔ$ $ΚΑΜ$ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γω-

νίαι αἱ ὑπὸ $H\Theta K$ $\Theta K\Lambda$ $K\Lambda M$ $\Lambda M H$ $M H \Theta$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $H\Theta K\Lambda M$ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν $AB\Gamma\Delta E$ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις γ.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσό- 13.
πλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν *Fig. 13.*
τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ $AB\Gamma\Delta E$. δεῖ δὴ εἰς τὸ $AB\Gamma\Delta E$
πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετρήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ $\Gamma\Delta E$
γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓZ ΔZ εὐθειῶν καὶ
ἀπὸ τοῦ Z σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις
αἱ FZ ΔZ εὐθεῖαι, ἐπεξέχθωσαν αἱ ZB ZA ZE
εὐθεῖαι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ $\Gamma\Delta$, κοινὴ
δὲ ἡ FZ , δύο δὴ αἱ $B\Gamma$ ΓZ δυοῖ ταῖς ΔF ΓZ ἴσαι
εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $B\Gamma Z$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Delta F Z$ ἴση.
βάσεις ἄρα ἡ BZ βάσει τῇ ΔZ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ
 $BZ\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta Z\Gamma$ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ
λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ-
ρς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ
 $\Gamma B Z$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Gamma \Delta Z$. Καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν
ἡ ὑπὸ $\Gamma \Delta E$ τῆς ὑπὸ $\Gamma \Delta Z$, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ $\Gamma \Delta E$
τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$, ἡ δὲ ὑπὸ $\Gamma \Delta Z$ τῇ ὑπὸ $\Gamma B Z$. καὶ
ἡ ὑπὸ $\Gamma B A$ ἄρα τῆς ὑπὸ $\Gamma B Z$ ἐστὶ διπλῇ. ἴση
ἄρα ἡ ὑπὸ $AB Z$ γωνία τῇ ὑπὸ $ZB\Gamma$. ἡ ἄρα ὑπὸ
 $AB\Gamma$ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς BZ εὐθείας.
Ὅμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ
 $B\Delta E$ $\Delta E\Lambda$ δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ZA
 ZE εὐθειῶν. Ἠχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ Z σημείου ἐπὶ

τὰς AB $BΓ$ $ΓΔ$ $ΔΕ$ $ΕΑ$ εὐθείας κάθετοι αἱ ZH $ZΘ$ ZK $ΖΑ$ ZM . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΘΓΖ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΚΓΖ$, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $ZΘΓ$ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ $ZΚΓ$ ἴση, δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ $ZΘΓ$ $ZΚΓ$ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν $ZΓ$ ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει· ἴση ἄρα ἡ $ZΘ$ κάθετος τῇ ZK καθετῷ. Ὀμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν $ΖΑ$ ZM ZH ἐκατέρω τῶν $ZΘ$ ZK ἴση ἐστίν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ZH $ZΘ$ ZK $ΖΑ$ ZM ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ Z διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ZH $ZΘ$ ZK $ΖΑ$ ZM κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάπεται τῶν AB $BΓ$ $ΓΔ$ $ΔΕ$ $ΕΑ$ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς H $Θ$ K $Α$ M σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ οὐκ ἐφάπεται αὐτῶν, ἀλλὰ τεμεῖ αὐτάς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένην ἐντὸς πίπτειν τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρον τῷ Z διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ZH $ZΘ$ ZK $ΖΑ$ ZM εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς AB $BΓ$ $ΓΔ$ $ΔΕ$ $ΕΑ$ εὐθείας· ἐφάπεται ἄρα αὐτῶν. Γεγράφθω ὡς ὁ $HΘΚΑΜ$.

Εἰς ἄρα τὸ δοθέν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιδ'

Περὶ τὸ δοθέν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι. 14.

Ἐστω τὸ δοθέν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν Fig. 14.

τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ $ΑΒΓΔΕ$. δεῖ δὴ περὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΒΓΔ$ $ΓΔΕ$ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν $ΓΖ$ $ΔΖ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Ζ$ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ $Β$ $Α$ $Ε$ σημεία ἐπεξεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ $ΖΒ$ $ΖΑ$ $ΖΕ$. Ὅμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ $ΓΒΑ$ $ΒΑΕ$ $ΑΕΔ$ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν $ΖΒ$ $ΑΖ$ $ΕΖ$ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΓΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΔΕ$, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ $ΒΓΔ$ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ $ΖΓΔ$, τῆς δὲ ὑπὸ $ΓΔΕ$ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ $ΓΔΖ$, καὶ ἡ ὑπὸ $ΖΓΔ$ ἄρα τῇ ὑπὸ $ΖΔΓ$ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $ΖΓ$ πλευρᾷ τῇ $ΖΔ$ ἐστὶν ἴση. Ὅμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν $ΖΒ$ $ΖΑ$ $ΖΕ$ ἑκατέρα τῶν $ΖΓ$ $ΖΔ$ ἐστὶν ἴση· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ $ΖΑ$ $ΖΒ$ $ΖΓ$ $ΖΔ$ $ΖΕ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ $Ζ$ καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν $ΖΑ$ $ΖΒ$ $ΖΓ$ $ΖΔ$ $ΖΕ$ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος. Περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ $ΑΒΓΔΕ$.

Περὶ ἄρα τὸ δοθέν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγέγραπται ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ι.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. 15.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ $ΑΒΓΔΕΖ$. δεῖ δὴ εἰς Fig. 15. τὸν $ΑΒΓΔΕΖ$ κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἦχθω τοῦ $ΑΒΓΔΕΖ$ κύκλου διάμετρος ἡ $ΑΔ$, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ $Η$, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ $Δ$ διαστήματι δὲ τῷ $ΔΗ$ κύκλος γε-

γράφω ὁ ΕΗΓΘ , καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΗ ΓΗ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β Ζ σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΑ . λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΗΓΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΗ . Ἀλλ' ἡ ΗΔ τῇ ΗΕ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΗΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἴση ἐστὶν. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ ΗΔΕ ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐπειδήπερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. Ὀμοίως δὲ δείχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΓ τρίτον δύο ὀρθῶν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΗ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΕΒ σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΗΓ ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ ΔΗΓ ΓΗΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφήν αὐταῖς αἱ ὑπὸ ΒΗΔ ΑΗΖ ΖΗΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ ἔξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ $\text{ΕΗΔ ΔΗΓ ΓΗΒ ΒΗΔ ΑΗΖ ΖΗΕ}$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν. αἱ ἔξ ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν. αἱ ἔξ ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. λέγω δὲ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείμεναι ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλη τῇ ΕΔΓΒΑ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ

περιφερείας ἢ ὑπὸ $ZE\Delta$ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς $E\Delta\Gamma B A$ περιφερείας ἢ ὑπὸ AZE γωνία· ἴση ἄρα ἢ ὑπὸ AZE γωνία τῇ ὑπὸ $ZE\Delta$. Ὅμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ $AB\Gamma\Delta EZ$ ἐξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ AZE $ZE\Delta$ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma\Delta EZ$ ἐξάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον. καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta EZ$ κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.


Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν ὅτι ἡ τοῦ ἐξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

(Καὶ εἰὰν διὰ τῶν $A B \Gamma \Delta E Z$ σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφθήσεται περὶ τὸν κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολουθῶς τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. Καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἐξάγωνον κύκλον ἐγγράψομεν τε καὶ περιγράψομεν.)

Πρότασις κς.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. 16.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $AB\Gamma\Delta$. δεῖ δὴ εἰς τὸν  Fig. 16. $AB\Gamma\Delta$ κύκλον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐνηρμόσθω εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον περιγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἢ $\Delta\Gamma$, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἢ AB . οἷων ἄρα ἐστὶν ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἢ μὲν $AB\Gamma$ περιφέρεια τρίτον οὔσα τοῦ

κύκλου ἔσται πέντε, ἡ δὲ AB περιφέρεια πεμπτὸν οὔσα τοῦ κύκλου ἔσται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ $BΓ$ τῶν ἴσων δύο. Τετμήσθω ἡ $BΓ$ δίχα κατὰ τὸ E , ἑκατέρα ἄρα τῶν BE $EΓ$ περιφερειῶν πεντεκαιδέκατον ἔσται τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου.

Ἐὰν ἄρα, ἐπιζεύξαντες τὰς BE $EΓ$ εὐθείας, ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον (διὰ τῶν ὁμοίων ταῖς ἐν τῇ πρὸ τούτου δείξαι) ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

(Ὅμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, ἐὰν διὰ τῶν κατὰ κύκλου διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἔτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαιδεκάγωνον, κύκλον ἐγγράψομεν τε καὶ περιγράψομεν.)

Τέλος τοῦ τετάρτου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

~~~~~

**Ὅροι.**

- α. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μείζον. 1.
- β. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μείζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῇται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος. 2.
- γ. (Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πληκτικότητα πρὸς ἀλλήλα ποιὰ σχέσις.) 3.
- δ. Λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. 4.
- ε. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκεις πολλαπλασίων, καθ' ὅποιον πολλαπλασιασμόν, ἑκατέρον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ὑπερέχη, ἢ ἅμα ἴσα ᾗ, ἢ ἅμα ἐλλείπη, ληφθέντα κατάλληλα. 5.
- ς. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκεις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχη τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχη τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἥπερ τὸ τρίτον πρὸς τὰ τέταρτον. 6.
- ζ. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλεῖσθαι. 7.
- η. (Ἀναλογία δὲ ἢ τῶν λόγων ταυτότης.) 8.

- θ'. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν. 9.
- ι. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον 10.  
πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται,  
ἥπερ πρὸς τὸ δεύτερον.
- ια. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ 11.  
πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν  
λέγεται, ἥπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ αἰεὶ ἐξῆς ἐν  
πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.
- ιβ. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι τὰ μὲν 12.  
ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις τὰ δὲ ἐπόμενα τοῖς ἐπο-  
μένοις.
- ιγ. Ἐναλλάξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμέ- 13.  
νου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἐπομένου πρὸς τὸ  
ἐπόμενον.
- ιδ. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἐπομέ- 14.  
νου, ὡς ἡγούμενον, πρὸς τὸ ἡγούμενον, ὡς ἐπόμενον.
- ιε. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου 15.  
μετὰ τοῦ ἐπομένου, ὡς ἐνός, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.
- ισ. Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπερ- 16.  
οχῆς, ἥ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἐπομένου, πρὸς  
αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.
- ιζ. Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγου- 17.  
μένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἥ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον  
τοῦ ἐπομένου.
- ιη. Διῦσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν 18.  
καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβα-  
νομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾗ ὡς ἐν τοῖς  
πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως  
ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχα-  
τον. (Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.)
- ιθ. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ᾗ ὡς 19.  
ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς  
ἐπόμενον, ἥ δὲ καὶ ὡς ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως  
ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι.

κ. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν 20.  
 τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ  
 πλῆθος γίνηται ὥς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν  
 ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις  
 μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον· ὥς δὲ ἐν τοῖς  
 πρώτοις μεγέθεσιν ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν  
 τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

Πρότασις α'.

Ἐὰν ἡ ὀποσαοῦν μεγέθη ὀποσωνοῦν με- 1.  
 γεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἐκάστου,  
 ἰσάκεις πολλαπλάσια· ὅσαπλάσιόν ἐστιν ἐν  
 τῶν μεγεθῶν ἐνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται  
 καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Ἐστω ὀποσαοῦν μεγέθη τὰ  $AB$   $\Gamma\Delta$  ὀποσωνοῦν Fig. 1.  
 μεγεθῶν τῶν  $E$   $Z$  ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἐκάστου,  
 ἰσάκεις πολλαπλάσια· λέγω ὅτι ὅσαπλάσιόν ἐστὶ τὸ  $AB$   
 τοῦ  $E$ , τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ  $AB$   $\Gamma\Delta$  τῶν  $E$   $Z$ .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $AB$  τοῦ  
 $E$ , καὶ τὸ  $\Gamma\Delta$  τοῦ  $Z$ · ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ  $AB$  με-  
 γέθη ἴσα τῷ  $E$ , τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ  $\Gamma\Delta$  ἴσα τῷ  $Z$ ,  
 διηρήσθω τὸ μὲν  $AB$  εἰς τὰ τῷ  $E$  μεγέθη ἴσα τὰ  
 $AH$   $HB$ , τὸ δὲ  $\Gamma\Delta$  εἰς τὰ τῷ  $Z$  ἴσα τὰ  $\Gamma\Theta$   $\Theta\Delta$ .  
 ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν  $AH$   $HB$  τῷ πλήθει  
 τῶν  $\Gamma\Theta$   $\Theta\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν  $AH$  τῷ  
 $E$ · τὸ δὲ  $\Gamma\Theta$  τῷ  $Z$ · ἴσα ἄρα καὶ τὰ  $AH$   $\Gamma\Theta$  τοῖς  
 $E$   $Z$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ  $HB$  τῷ  $E$ · καὶ  
 τὸ  $\Theta\Delta$  τῷ  $Z$ · ἴσα ἄρα καὶ τὰ  $HB$   $\Theta\Delta$  τοῖς  $E$   $Z$ · ὅσα  
 ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ  $AB$  ἴσα τῷ  $E$ , τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς  
 $AB$   $\Gamma\Delta$  ἴσα τοῖς  $E$   $Z$ · ὅσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB$  τοῦ  
 $E$ , τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ  $AB$   $\Gamma\Delta$  τῶν  $E$   $Z$ .

Ἐὰν ἄρα ἡ ὀποσαοῦν μεγέθη ὀποσωνοῦν μεγε-  
 θῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἐκάστου, ἰσάκεις πολλα-

πλάσια· ὅσαπλάσιόν ἐστὶν ἐν τῶν μεγεθῶν ἐνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Πρότασις β.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλα- 2.  
πλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ἢ δὲ καὶ πέμ-  
πτον δευτέρου ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ  
ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ  
πέμπτον δευτέρου ἰσάκεις ἔσται πολλαπλά-  
σίον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ  $AB$  δευτέρου τοῦ  $\Gamma$  ἰσάκεις ἔστω Fig. 2.  
πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ  $AE$  τετάρτου τοῦ  $Z$ ,  
ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ  $BH$  δευτέρου τοῦ  $\Gamma$  ἰσάκεις  
πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ  $E\Theta$  τετάρτου τοῦ  $Z$ . λέγω  
ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ  $AH$  δευτέ-  
ρου τοῦ  $\Gamma$  ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ  
ἕκτον τὸ  $\Delta\Theta$  τετάρτου τοῦ  $Z$ .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $AB$  τοῦ  
 $\Gamma$  καὶ τὸ  $AE$  τοῦ  $Z$ . ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ  $AB$  με-  
γέθη ἴσα τῷ  $\Gamma$ , τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ  $AE$  ἴσα τῷ  $Z$ .  
Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ  $BH$  ἴσα τῷ  
 $\Gamma$ , τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ  $Z\Theta$  ἴσα τῷ  $Z$ . ὅσα ἄρα ἐστὶν  
ἐν ὅλῳ τῷ  $AH$  ἴσα τῷ  $\Gamma$ , τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ  
 $\Delta\Theta$  ἴσα τῷ  $Z$ . ὅσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τῷ  $AH$  τοῦ  $\Gamma$ ,  
τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ  $\Delta\Theta$  τοῦ  $Z$ . Συντε-  
θὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ  $AH$  δευτέρου τοῦ  
 $\Gamma$  ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον  
τὸ  $\Delta\Theta$  τετάρτου τοῦ  $Z$ .

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ . . . καὶ τὰ  
ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις γ.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλα- 3.  
πλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ

ισάκεις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου, καὶ διῦσον τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ  $A$  δευτέρου τοῦ  $B$  ἰσάκεις ἔστω *Fig. 3.* πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ  $\Gamma$  τετάρτου τοῦ  $\Delta$ , καὶ εἰλήφθω τῶν  $A$   $\Gamma$  ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $EZ$   $H\Theta$ . λέγω ὅτι ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $EZ$  τοῦ  $B$  καὶ τὸ  $H\Theta$  τοῦ  $\Delta$ .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $EZ$  τοῦ  $A$  καὶ τὸ  $H\Theta$  τοῦ  $\Gamma$ . ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ  $EZ$  ἴσα τῷ  $A$ , τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ  $H\Theta$  ἴσα τῷ  $\Gamma$ . Δηρήσθω τὸ μὲν  $EZ$  εἰς τὰ τῷ  $A$  μεγέθει ἴσα τὰ  $EK$   $KZ$ , τὸ δὲ  $H\Theta$  εἰς τὰ τῷ  $\Gamma$  ἴσα τὰ  $HA$   $\Lambda\Theta$ . ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν  $EK$   $KZ$  τῷ πλήθει τῶν  $HA$   $\Lambda\Theta$ . Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $A$  τοῦ  $B$  καὶ τὸ  $\Gamma$  τοῦ  $\Delta$ , ἴσον δὲ τὸ μὲν  $EK$  τῷ  $A$ , τὸ δὲ  $HA$  τῷ  $\Gamma$ . ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $EK$  τοῦ  $B$  καὶ τὸ  $HA$  τοῦ  $\Delta$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $KZ$  τοῦ  $B$  καὶ τὸ  $\Lambda\Theta$  τοῦ  $\Delta$ . Ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ  $EK$  δευτέρου τοῦ  $B$  ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ  $HA$  τετάρτου τοῦ  $\Delta$ . ἐστὶ δὲ καὶ πέμπτον τὸ  $KZ$  δευτέρου τοῦ  $B$  ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ  $\Lambda\Theta$  τετάρτου τοῦ  $\Delta$ . καὶ συντεθέν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ  $EZ$  δευτέρου τοῦ  $B$  ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ  $H\Theta$  τετάρτου τοῦ  $\Delta$ .

Ἐὰν ἔρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

#### Πρότασις δ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν 4.  
ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον. καὶ τὰ  
ισάκεις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρί-



του πρὸς τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου, καὶ τετάρτου, καθ' ὅποιονοῦν πολλαπλασιασμόν, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, ληφθέντα κατὰλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ  $A$  πρὸς δεύτερον τὸ  $B$  τὸν αὐ- Fig. 4.  
τὸν ἔχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ  $\Gamma$  πρὸς τέταρτον τὸ  $\Delta$ , καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν  $A$   $\Gamma$  ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $E$   $Z$ , τῶν δὲ  $B$   $\Delta$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $H$   $\Theta$ . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $H$ , οὕτως τὸ  $Z$  πρὸς τὸ  $\Theta$ .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν  $E$   $Z$  ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $K$   $\Lambda$ , τῶν δὲ  $H$   $\Theta$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $M$   $N$ .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν  $E$  τοῦ  $A$ , τὸ δὲ  $Z$  τοῦ  $\Gamma$ , καὶ εἴληπται τῶν  $E$   $Z$  ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $K$   $\Lambda$ . ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $K$  τοῦ  $A$  καὶ τὸ  $\Lambda$  τοῦ  $\Gamma$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $M$  τοῦ  $B$  καὶ τὸ  $N$  τοῦ  $\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , καὶ εἴληπται τῶν μὲν  $A$   $\Gamma$  ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $K$   $\Lambda$ , τῶν δὲ  $B$   $\Delta$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $M$   $N$ . εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ  $K$  τοῦ  $M$ , ὑπερέχει καὶ τὸ  $\Lambda$  τοῦ  $N$ . καὶ εἰ ἴσον, ἴσον. καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν  $K$   $\Lambda$  τῶν  $E$   $Z$  ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ  $M$   $N$  τῶν  $H$   $\Theta$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια. ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $H$ , οὕτως τὸ  $Z$  πρὸς τὸ  $\Theta$ .

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

#### Πρότασις 4.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκεις ἢ πολλα- 5.  
πλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος  
καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκεις ἔσται πολ-  
λαπλά-

λαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Μέγεθος γὰρ τὸ  $AB$  μεγέθους τοῦ  $ΓΑ$  ἰσάκως Fig. 5. ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθέν τὸ  $AE$  ἀφαιρέ-  
θέντος τοῦ  $ΓΖ$ . λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ  $EB$  λοιποῦ  
τοῦ  $ΖΔ$  ἰσάκως ἔσται πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστιν  
ὅλον τὸ  $AB$  ὅλου τοῦ  $ΓΔ$ .

Ὅσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ  $AE$  τοῦ  $ΓΖ$ , τοσαν-  
ταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ  $EB$  τοῦ  $ΓΗ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκως ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $AE$  τοῦ  
 $ΓΖ$  καὶ τὸ  $EB$  τοῦ  $ΗΓ$ , ἰσάκως ἄρα ἐστὶ πολλαπλά-  
σιον τὸ  $AE$  τοῦ  $ΓΖ$  καὶ τὸ  $AB$  τοῦ  $ΗΖ$ . κεῖται δὲ  
ἰσάκως πολλαπλάσιον τὸ  $AE$  τοῦ  $ΓΖ$  καὶ τὸ  $AB$  τοῦ  
 $ΓΔ$ . ἰσάκως ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $AB$  ἑκατέρου  
τῶν  $ΗΖ$   $ΓΔ$ . ἴσον ἄρα τὸ  $ΗΖ$  τῷ  $ΓΔ$ . κοινὸν ἀφη-  
ρήσθω τὸ  $ΓΖ$ . λοιπὸν ἄρα τὸ  $ΗΓ$  λοιπῷ τῷ  $ΔΖ$   
ἴσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκως ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $AE$   
τοῦ  $ΓΖ$  καὶ τὸ  $EB$  τοῦ  $ΗΓ$ , ἴσον δὲ τῷ  $ΗΓ$  τὸ  $ΔΖ$   
ἰσάκως ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $AE$  τοῦ  $ΓΖ$  καὶ  
τὸ  $EB$  τοῦ  $ΖΔ$ . Ἰσάκως δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον  
τὸ  $AE$  τοῦ  $ΓΖ$  καὶ τὸ  $AB$  τοῦ  $ΓΔ$ . ἰσάκως ἄρα ἐστὶ  
πολλαπλάσιον τὸ  $EB$  τοῦ  $ΖΔ$  καὶ τὸ  $AB$  τοῦ  $ΓΔ$ .  
καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ  $EB$  λοιποῦ τοῦ  $ΖΔ$  ἰσάκως ἐστὶ  
πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ  $AB$  ὅλου  
τοῦ  $ΓΔ$ .

Ἐὰν ἄρα μέγεθος μεγέθους ἰσάκως ἢ . . . καὶ τῇ  
ἐκῆς ὡς ἐν τῇ πρότεσι . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις εἰ.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκως ἢ 6.  
πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν  
αὐτῶν ἰσάκως ἢ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ  
τοῖς αὐτοῖς ἢτοι ἴσα ἐστίν, ἢ ἰσάκως αὐτῶν  
πολλαπλάσια.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ  $AB$   $\Gamma\Delta$  δύο μεγεθῶν τῶν Fig. 6.  
 $EZ$  ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ  
 $AH$   $\Gamma\Theta$  τῶν αὐτῶν  $EZ$  ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσια·  
 λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ  $HB$   $\Theta\Delta$  τοῖς  $EZ$  ἤτοι ἴσα  
 ἐστίν, ἢ ἰσάκεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Ἐστω γὰρ πρότερον τὸ  $HB$  τῷ  $E$  ἴσον· λέγω  
 ὅτι καὶ τὸ  $\Theta\Delta$  τῷ  $Z$  ἴσον ἐστίν.

Κείσθω γὰρ τῷ  $Z$  ἴσον τὸ  $\Gamma K$ . Καὶ ἐπεὶ ἰσά-  
 κεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $AH$  τοῦ  $E$  καὶ τὸ  $\Gamma\Theta$   
 τοῦ  $Z$ , ἴσον δὲ τὸ μὲν  $HB$  τῷ  $E$ , τὸ δὲ  $K\Gamma$  τῷ  
 $Z$ · ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $AB$  τοῦ  $E$  καὶ  
 τὸ  $K\Theta$  τοῦ  $Z$ . Ἰσάκεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον  
 τὸ  $AB$  τοῦ  $E$ , καὶ τὸ  $\Gamma\Delta$  τοῦ  $Z$ · ἰσάκεις ἄρα  
 ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $K\Theta$  τοῦ  $Z$ · καὶ τὸ  $\Gamma\Delta$  τοῦ  
 $Z$ . Ἐπεὶ οὖν ἐκάτερον τῶν  $K\Theta$   $\Gamma\Delta$  τοῦ  $Z$  ἰσάκεις  
 ἐστὶ πολλαπλάσιον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $K\Theta$  τῷ  $\Gamma\Delta$ .  
 Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ  $\Gamma\Theta$ · λοιπὸν ἄρα τὸ  $K\Gamma$  λοιπῷ  
 τῷ  $\Theta\Delta$  ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ  $K\Gamma$  τῷ  $Z$  ἐστὶν ἴσον·  
 καὶ τὸ  $\Theta\Delta$  ἄρα τῷ  $Z$  ἴσον ἐστίν. Ὡστε εἰ τὸ  $HB$   
 τῷ  $E$  ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ  $\Theta\Delta$  ἴσον ἔσται τῷ  $Z$ .

Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ πολλαπλάσιον ἢ  
 τὸ  $HB$  τοῦ  $E$ , τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ  $\Theta\Delta$  τοῦ  $Z$ .

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκεις ἢ . .  
 καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ζ.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λό- 7.  
 γον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἐστω ἴσα μεγέθη τὰ  $A$   $B$ , ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε Fig. 7.  
 μέγεθος τὸ  $\Gamma$ · λέγω ὅτι ἐκάτερον τῶν  $A$   $B$  πρὸς τὸ  
 $\Gamma$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ  $\Gamma$  πρὸς ἐκάτερον  
 τῶν  $A$   $B$ .

Εἰληθήθω γὰρ τῶν μὲν  $A$   $B$  ἰσάκεις πολλαπλάσια  
 τὰ  $\Delta$   $E$ , τοῦ δὲ  $\Gamma$  ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ  $Z$ .

Ἐπεὶ οὖν ἰσάκως ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $\Delta$  τοῦ  $A$  καὶ τὸ  $E$  τοῦ  $B$ , ἴσον δὲ τὸ  $A$  τῷ  $B$ . ἴσον ἄρα καὶ τὸ  $\Delta$  τῷ  $E$ . Ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ  $Z$  τοῦ  $\Gamma$  πολλαπλάσιον· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ  $\Delta$  τοῦ  $Z$ , ὑπερέχει καὶ τὸ  $E$  τοῦ  $Z$ . καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν  $\Delta$   $E$  τῶν  $A$   $B$  ἰσάκως πολλαπλάσια, τὸ δὲ  $Z$  τοῦ  $\Gamma$  ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $B$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ .

Λέγω ὅτι καὶ τὸ  $E$  πρὸς ἑκάτερον τῶν  $A$   $B$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $\Delta$  τῷ  $E$ . ἄλλο δέ τι τὸ  $Z$ · εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ  $Z$  τοῦ  $\Delta$ , ὑπερέχει καὶ τοῦ  $E$ . καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν  $Z$  τοῦ  $\Gamma$  πολλαπλάσιον, τὰ δὲ  $\Delta$   $E$  τῶν  $A$   $B$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκως πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $A$ , οὕτως τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $B$ .

Τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν ὅτι ἐὰν μεγέθη τινὰ ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ᾖσται.

### Πρότασις η.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μείζον πρὸς 8.  
τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ πρὸς τὸ μείζον.

Ἐστω ἀνισα μεγέθη τὰ  $AB$   $\Gamma$ , καὶ ἔστω μεί- Fig 8.  
ζον τὸ  $AB$  τοῦ  $\Gamma$ , ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ  $\Delta$ . λέγω ὅτι τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $\Delta$  μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , καὶ τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  $\Gamma$  μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ πρὸς τὸ  $AB$ .

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ  $AB$  τοῦ  $\Gamma$ , κείσθω τῷ  $\Gamma$  ἴσον τὸ  $AE$ , τὸ δὲ ἔλασσον τῶν  $AE$   $EB$  πολλαπλασιασισιζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ  $A$  μείζον. Ἐστω πρότερον τὸ  $AE$  ἔλαττον τοῦ  $EB$ , καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ  $AE$ , ἕως οὗ τὸ γινόμενον μείζον γένηται τοῦ  $A$ , καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ  $ZH$  μείζον τοῦ  $A$ , καὶ ὅσαπλάσιόν ἐστὶ τὸ  $ZH$  τοῦ  $AE$ , τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν  $H\Theta$  τοῦ  $EB$ , τὸ δὲ  $K$  τοῦ  $\Gamma$ . καὶ εἰλήφθω τοῦ  $A$  διπλάσιον μὲν τὸ  $\Lambda$ , τριπλάσιον δὲ τὸ  $M$ , καὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείον ἕως οὗ τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ  $A$ , πρώτως δὲ μείζον τοῦ  $K$ . Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ  $N$  τετραπλάσιον μὲν τοῦ  $A$ , πρώτως δὲ μείζον τοῦ  $K$ .

Ἐπεὶ οὖν τὸ  $K$  τοῦ  $N$  πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ  $K$  ἄρα τοῦ  $M$  οὐκ ἐστὶν ἔλαττον. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $ZH$  τοῦ  $AE$  καὶ τὸ  $H\Theta$  τοῦ  $EB$ , ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $ZH$  τοῦ  $AE$  καὶ τὸ  $Z\Theta$  τοῦ  $AB$ . Ἰσάκεις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $ZH$  τοῦ  $AE$  καὶ τὸ  $K$  τοῦ  $\Gamma$ . ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $Z\Theta$  τοῦ  $AB$ , καὶ τὸ  $K$  τοῦ  $\Gamma$ . τὰ  $Z\Theta$   $K$  ἄρα τῶν  $AB$   $\Gamma$  ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $H\Theta$  τοῦ  $EB$  καὶ τὸ  $K$  τοῦ  $\Gamma$ , ἴσον δὲ τὸ  $EB$  τῷ  $\Gamma$ . ἴσον ἄρα καὶ τὸ  $H\Theta$  τῷ  $K$ . Τὸ δὲ  $K$  τοῦ  $M$  οὐκ ἐστὶν ἔλαττον. οὐδ' ἄρα τὸ  $H\Theta$  τοῦ  $M$  ἔλαττόν ἐστι. Μείζον δὲ τὸ  $ZH$  τοῦ  $A$ . ὅλον ἄρα τὸ  $Z\Theta$  συναμφοτέρων τῶν  $A$   $M$  μείζον ἐστὶν. Ἀλλὰ συναμφοτέρα τὰ  $A$   $M$  τῷ  $N$  ἐστὶν ἴσα. ἐπειδὴπερ τὸ  $M$  τοῦ  $A$  τριπλάσιόν ἐστι. συναμφοτέρα δὲ τὰ  $A$   $M$  τοῦ  $A$  ἐστὶ τετραπλάσια, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ  $N$  τοῦ  $A$  τετραπλάσιον. συναμφοτέρα ἄρα τὰ  $M$   $A$  τῷ  $N$  ἴσα ἐστὶν. Ἀλλὰ τὸ  $Z\Theta$  τῶν  $A$   $M$  μείζον ἐστίν. τὸ  $Z\Theta$  ἄρα τοῦ  $N$  ὑπερέχει, τὸ δὲ  $K$  τοῦ  $N$  οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ἴστι τὰ μὲν  $Z\Theta$   $K$  τῶν  $AB$   $\Gamma$  ἰσάκεις πολλαπλάσια,

τὰ δὲ  $N$  τοῦ  $\Delta$  ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον· τὸ  $AB$  ἄρα πρὸς τὸ  $\Delta$  μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ .

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  $\Gamma$  μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  $AB$ .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν  $N$  τοῦ  $K$  ὑπερέχει, τοῦ δὲ  $Z\Theta$  οὐχ ὑπερέχει. Καί ἐστι τὸ μὲν  $N$  τοῦ  $\Delta$  πολλαπλάσιον, τὰ δὲ  $Z\Theta$   $K$  τῶν  $AB$   $\Gamma$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκως πολλαπλάσια, τὸ  $\Delta$  ἄρα πρὸς τὸ  $\Gamma$  μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  $AB$ .

Ἀλλὰ δὴ τὸ  $AE$  τοῦ  $EB$  μείζον ἔστω· τὸ δὴ ἔλαττον τὸ  $EB$  πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ  $\Delta$  μείζον. Πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ  $H\Theta$  πολλαπλάσιον μὲν τοῦ  $EB$ , μείζον δὲ τοῦ  $\Delta$ · καὶ ὅσαπλάσιόν ἐστι τὸ  $H\Theta$  τοῦ  $EB$ , τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν  $ZH$  τοῦ  $AE$ , τὸ δὲ  $K$  τοῦ  $\Gamma$ . Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ  $Z\Theta$   $K$  τῶν  $AB$   $\Gamma$  ἰσάκως ἐστὶ πολλαπλάσια· Καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ  $N$  πολλαπλάσιον μὲν τοῦ  $\Delta$ , πρώτως δὲ μείζον τοῦ  $ZH$ · ὥστε πάλιν τὸ  $ZH$  τοῦ  $M$  οὐκ ἐστὶν ἔλασσον, μείζον δὲ τὸ  $H\Theta$  τοῦ  $\Delta$ · ὅλον ἄρα τὸ  $Z\Theta$  τῶν  $\Delta$   $M$ , τοῦτ' ἐστὶ τοῦ  $N$ , ὑπερέχει, τὸ δὲ  $K$  τοῦ  $N$  οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδήπερ καὶ τὸ  $ZH$  μείζον ὢν τοῦ  $H\Theta$ , τοῦτ' ἐστὶ τοῦ  $K$ , τοῦ  $N$  οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ὡσαύτως κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν.

Τῶν ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μείζον πρὸς . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις θ'.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ 9.

τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐχέτω γὰρ ἐκάτερον τῶν  $A$   $B$  πρὸς τὸ  $\Gamma$  τὸν *Fig. 9.* αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $A$  τῷ  $B$ .

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν ἐκάτερον τῶν  $A$   $B$  πρὸς τὸ  $\Gamma$  τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δὲ ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $A$  τῷ  $B$ .

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ  $\Gamma$  πρὸς ἐκάτεραν τῶν  $A$   $B$  τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $A$  τῷ  $B$ .

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν τὰ  $\Gamma$  πρὸς ἐκάτερον τῶν  $A$   $B$  τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δὲ ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $A$  τῷ  $B$ .

Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ι.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχόντων τὰ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστι. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν. 10.

Ἐχέτω γὰρ τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $\Gamma$  μείζονα λόγον, ἥπερ *Fig. 10.* τὸ  $B$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ · λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστὶ τὸ  $A$  τοῦ  $B$ .

Εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴσον ἐστὶ τὸ  $A$  τῷ  $B$ , ἢ ἔλασσον. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστὶ τὸ  $A$  τῷ  $B$ · ἐκάτερον γὰρ ἂν τῶν  $A$   $B$  πρὸς τὸ  $\Gamma$  τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ  $A$  τῷ  $B$ . Οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστι τὸ  $A$  τοῦ  $B$ · τὸ  $A$  γὰρ ἂν πρὸς τὸ  $\Gamma$  ἐλάσσονα εἶχε λόγον, ἥπερ τὸ  $B$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ . Οὐκ ἔχει δὲ οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ  $A$  τοῦ  $B$ . Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ  $A$  τοῦ  $B$ .

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $B$  μείζονα λόγον, ἥπερ τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $A$ · λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ  $B$  τοῦ  $A$ .

Εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴσον ἐστίν, ἢ μεῖζον. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστὶ τὸ  $B$  τῷ  $A$ · τὸ  $\Gamma$  γὰρ ἂν πρὸς ἐκάτερον τῶν  $A$   $B$  τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ

οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ  $A$  τῷ  $B$ . Οὐ δὲ μὴν μείζον ἐστὶ τὸ  $B$  τοῦ  $A$ . τὸ  $\Gamma$  γὰρ ἂν πρὸς τὸ  $B$  ἐλάσσονα λόγον εἶχεν, ἢ περ πρὸς τὸ  $A$ . Οὐκ ἔχει δὲ οὐκ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ  $B$  τοῦ  $A$ . Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, ἐλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $B$  τοῦ  $A$ .

Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων . . . καὶ τὰ  
ἕξως ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ια.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις 11.  
εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἐστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως Fig. 11.  
τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , ὡς δὲ τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , οὕτως τὸ  $E$   
πρὸς τὸ  $Z$ . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕ-  
τως τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ ,

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν  $A \Gamma E$  ἰσάκεις πολλα-  
πλάσια τὰ  $H \Theta K$ , τῶν δὲ  $B \Delta Z$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν  
ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $M N$ .

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  
 $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , καὶ εἰληπται τῶν μὲν  $A \Gamma$  ἰσάκεις  
πολλαπλάσια τὰ  $H \Theta$ , τῶν δὲ  $B \Delta$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν  
ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $M$ . εἰ ἄρα ὑπερέχει  
τὸ  $H$  τοῦ  $A$ , ὑπερέχει καὶ τὸ  $\Theta$  τοῦ  $M$  καὶ εἰ ἴσον,  
ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν  
ὡς τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , οὕτως τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ , καὶ εἰ-  
ληπται τῶν μὲν  $\Gamma E$  ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $\Theta K$ ,  
τῶν δὲ  $\Delta Z$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  
 $M N$ . εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ  $\Theta$  τοῦ  $M$ , ὑπερέχει καὶ τὸ  
 $K$  τοῦ  $N$ . καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον.  
Ἀλλὰ εἰ ὑπερέχει τὸ  $\Theta$  τοῦ  $M$ , ὑπερέχει καὶ τὸ  $H$   
τοῦ  $A$ . καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον.  
ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ  $H$  τοῦ  $A$ , ὑπερέχει καὶ τὸ  
 $K$  τοῦ  $N$ . καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον.  
Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν  $H K$  τῶν  $A E$  ἰσάκεις πολλαπλά-  
σια, τὰ δὲ  $M N$  τῶν  $B Z$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις



πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὰ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ .

Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ . . . καὶ τὰ ἑξῆς  
δε ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι,

Πρότασις ιβ.

Ἐὰν ἡ ὀποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσται 12.  
ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων,  
οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα  
τὰ ἐπόμενα.

Ἐστωσαν ὀποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον τὰ  $A B$  Fig. 12.  
 $\Gamma \Delta E Z$ , ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $\Gamma$  πρὸς  
τὸ  $\Delta$ , καὶ τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ . λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ  
 $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὰ  $A \Gamma E$  πρὸς τὰ  $B \Delta Z$ .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν  $A \Gamma E$  ἰσάκεις πολλα-  
πλάσια τὰ  $H \Theta K$ , τῶν δὲ  $B \Delta Z$  ἄλλα ἢ ἔτυχεν  
ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $\Lambda M N$ .

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  
 $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , καὶ τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ , καὶ εἴληπται  
τῶν μὲν  $A \Gamma E$  ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $H \Theta K$   
τῶν δὲ  $B \Delta Z$  ἄλλα ἢ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλά-  
σια τὰ  $\Lambda M N$ . εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ  $H$  τοῦ  $\Lambda$ , ὑπερ-  
έχει καὶ τὸ  $\Theta$  τοῦ  $M$ , καὶ τὸ  $K$  τοῦ  $N$ . καὶ εἰ ἴσον,  
ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον, ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει  
τὸ  $H$  τοῦ  $\Lambda$ , ὑπερέχει καὶ τὰ  $H \Theta K$  τῶν  $\Lambda M N$   
 $N$ . καὶ εἰ ἴσον, ἴσα· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσονα. Καί  
ἐστὶ τὸ μὲν  $H$  καὶ τὰ  $H \Theta K$  τοῦ  $A$  καὶ τῶν  $A \Gamma E$   
 $E$  ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἐπειδήπερ ἐὰν ἡ ὀποσαοῦν  
μεγέθη ὀποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκασ-  
τον ἐκάστων, ἰσάκεις πολλαπλάσια, ὅσαπλάσιόν ἐστιν  
ἐν τῶν μεγεθῶν ἐνός, τασανταπλάσια ἔσται καὶ τὰ  
πάντα τῶν πάντων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ  $\Lambda$  καὶ  
τὰ  $\Lambda M N$  τοῦ  $B$  καὶ τῶν  $B \Delta Z$  ἰσάκεις ἐστὶ πολ-  
λαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως  
τὰ  $A \Gamma E$  πρὸς τὰ  $B \Delta Z$ .

Ἐὰν ἄρα ἡ ὀποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν 13.  
ἔχη λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον  
δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχη, ἥπερ  
πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύ-  
τερον μείζονα λόγον ἔξει, ἥπερ πέμπτον  
πρὸς ἕκτον.

Πρῶτον μὲν γὰρ τὸ  $A$  πρὸς δεύτερον τὸ  $B$  τὸν Fig. 13.  
αὐτὸν ἔχτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ  $\Gamma$  πρὸς τέταρτον  
τὸ  $\Delta$ , τρίτον δὲ τὸ  $\Gamma$  πρὸς τέταρτον τὸ  $\Delta$  μείζονα  
λόγον ἔχτω, ἥπερ πέμπτον τὸ  $E$  πρὸς ἕκτον τὸ  $Z$ .  
λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ  $A$  πρὸς δεύτερον τὸ  $B$  μεί-  
ζονα λόγον ἔξει, ἥπερ πέμπτον τὸ  $E$  πρὸς ἕκτον τὸ  $Z$ .

Ἐπεὶ γὰρ τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$  μείζονα λόγον ἔχει,  
ἥπερ τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ · ἔστι τινὰ τῶν μὲν  $\Gamma$   $E$  ἰσα-  
κίς πολλαπλάσια, τῶν δὲ  $\Delta$   $Z$  ἄλλα ἢ ἔτυχεν ἰσάκίς  
πολλαπλάσια· καὶ τὸ μὲν τοῦ  $\Gamma$  πολλαπλάσιον τοῦ  
τοῦ  $\Delta$  πολλαπλασίου ὑπερέχει, τὸ δὲ τοῦ  $E$  πολλα-  
πλάσιον τοῦ τοῦ  $Z$  πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει. Εἰ-  
λήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν  $\Gamma$   $E$  ἰσάκίς πολλαπλάσια  
τὰ  $H$   $\Theta$ , τῶν δὲ  $\Delta$   $Z$  ἄλλα ἢ ἔτυχεν ἰσάκίς πολλα-  
πλάσια τὰ  $K$   $\Lambda$ , ὥστε τὸ μὲν  $H$  τοῦ  $K$  ὑπερέχειν,  
τὸ δὲ  $\Theta$  τοῦ  $\Lambda$  μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὅσαπλάσιον μὲν  
ἔστι τὸ  $H$  τοῦ  $\Gamma$ , τοσανταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ  $M$   
τοῦ  $A$ · ὅσαπλάσιον δὲ τὸ  $K$  τοῦ  $\Delta$ , τοσανταπλάσιον  
ἔστω καὶ τὸ  $N$  τοῦ  $B$ .

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $\Gamma$   
πρὸς τὸ  $\Delta$ , καὶ εἰληπταί τῶν μὲν  $A$   $\Gamma$  ἰσάκίς πολλα-  
πλάσια τὰ  $M$   $H$ , τῶν δὲ  $B$   $\Delta$  ἄλλα ἢ ἔτυχεν ἰσά-  
κίς πολλαπλάσια τὰ  $N$   $K$ · εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ  $M$   
τοῦ  $N$ , ὑπερέχει καὶ τὸ  $H$  τοῦ  $K$ · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον.

καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὑπερέχει δὲ τὸ  $H$  τοῦ  $K$ ,  
 ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ  $M$  τοῦ  $N$ . Τὸ δὲ  $\Theta$  τοῦ  $A$   
 οὐχ ὑπερέχει· καὶ ἐστὶ τὰ μὲν  $M$   $\Theta$  τῶν  $A$   $E$  ἰσά-  
 κης πολλαπλάσια, τὰ δὲ  $N$   $A$  τῶν  $B$   $Z$  ἄλλα ἂ ἔτυ-  
 χεν ἰσάκης πολλαπλάσια· τὸ ἄρα  $A$  πρὸς τὸ  $B$  μεί-  
 ζονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ .

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν . . .  
 καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ιδ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν 14.  
 ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ  
 πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ· καὶ τὸ δεύτε-  
 ρον τοῦ τετάρτου μείζον ἔσται· καὶ ἴσον.  
 ἴσον· καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

Πρῶτον γὰρ τὸ  $A$  πρὸς δεύτερον τὸ  $B$  τὸν αὐ- Fig. 14.  
 τὸν ἐχέτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ  $\Gamma$  πρὸς τέταρτον τὸ  
 $\Delta$ , μείζον δὲ ἔστω τὸ  $A$  τοῦ  $\Gamma$ · λέγω ὅτι καὶ τὸ  $B$   
 τοῦ  $\Delta$  μείζον ἔστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ  $A$  τοῦ  $\Gamma$ , ἄλλο δὲ ὃ  
 ἔτυχε μέγεθος τὸ  $B$ · τὸ  $A$  ἄρα πρὸς τὸ  $B$  μείζονα  
 λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $B$ . Ὡς δὲ τὸ  $A$  πρὸς  
 τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ · καὶ τὸ  $\Gamma$  ἄρα πρὸς τὸ  
 $\Delta$  μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $B$ . Πρὸς  
 ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν·  
 ἔλαττον ἄρα τὸ  $\Delta$  τοῦ  $B$ · ὥστε μείζον ἐστὶ τὸ  $B$  τοῦ  $\Delta$ .

Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ  $A$  τῷ  
 $\Gamma$ , ἴσον ἔσται καὶ τὸ  $B$  τῷ  $\Delta$ · καὶ ἔλασσον ἢ τὸ  $A$   
 τοῦ  $\Gamma$ , ἔλασσον ἔσται καὶ τὸ  $B$  τοῦ  $\Delta$ .

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν . . .  
 καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ιε.

Τὰ μέρη τοῖς ὡς αὐτως πολλαπλασίοις 15.  
 τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Ἐστω γὰρ ἰσάκεις πολλαπλάσιον τὸ  $AB$  τοῦ  $\Gamma$  Fig. 15. καὶ τὸ  $\Delta E$  τοῦ  $Z$ . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $Z$ , οὕτως τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $\Delta E$ .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $AB$  τοῦ  $\Gamma$  καὶ τὸ  $\Delta E$  τοῦ  $Z$ . ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ  $AB$  μεγέθῃ ἴσα τῷ  $\Gamma$ , τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ  $\Delta E$  ἴσα τῷ  $Z$ . Διηρήσθω τὸ μὲν  $AB$  εἰς τὰ τῷ  $\Gamma$  μεγέθῃ ἴσα, τὰ  $AH H\Theta \Theta B$ , τὸ δὲ  $\Delta E$  εἰς τὰ τῷ  $Z$  ἴσα, τὰ  $\Delta K K\Lambda \Lambda E$ . ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν  $AH H\Theta \Theta B$  τῷ πλῆθει τῶν  $\Delta K K\Lambda \Lambda E$ . Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ  $AH H\Theta \Theta B$  ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ  $\Delta K K\Lambda \Lambda E$  ἴσα ἀλλήλοις. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $AH$  πρὸς τὸ  $\Delta K$ , οὕτως τὸ  $H\Theta$  πρὸς τὸ  $K\Lambda$ , καὶ τὸ  $\Theta B$  πρὸς τὸ  $\Lambda E$ . ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων, πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $AH$  πρὸς τὸ  $\Delta K$ , οὕτως τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $\Delta E$ . Ἰσον δὲ τὸ μὲν  $AH$  τῷ  $\Gamma$ , τὸ δὲ  $\Delta K$  τῷ  $Z$ . ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $Z$  οὕτως τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $\Delta E$ .

Τὰ ἄρα μέρη τοῖς ὡσαύτως . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ιε.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ 16. ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ  $A B \Gamma \Delta$ , Fig. 16. ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ . λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $B$  πρὸς τὸ  $\Delta$ .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν  $A B$  ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $E Z$ . τῶν δὲ  $\Gamma \Delta$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $H \Theta$ .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $E$  τοῦ  $A$  καὶ τὸ  $Z$  τοῦ  $B$ , τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολ-

λαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ . Ὡς δὲ τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ · καὶ ὡς ἄρα τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , οὕτως τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ . Πάλιν, ἐπεὶ τὰ  $H \Theta$  τῶν  $\Gamma \Delta$  ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , οὕτως τὸ  $H$  πρὸς τὸ  $\Theta$ . Ὡς δὲ τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , οὕτως τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ · καὶ ὡς ἄρα τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ , οὕτως τὸ  $H$  πρὸς τὸ  $\Theta$ . Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ᾗ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλασσον, ἔλασσον. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ  $E$  τοῦ  $H$ , ὑπερέχει καὶ τὸ  $Z$  τοῦ  $\Theta$ · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν  $E Z$  τῶν  $A B$  ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ  $H \Theta$  τῶν  $\Gamma \Delta$  ἄλλα ἢ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $B$  πρὸς τὸ  $\Delta$ .

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ιζ.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, 17.  
καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ  $AB BE$  Fig. 17.  
 $\Gamma\Delta \Delta Z$ , ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $BE$ , οὕτως τὸ  $\Gamma\Delta$  πρὸς τὸ  $\Delta Z$ · λέγω ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ  $AE$  πρὸς τὸ  $EB$ , οὕτως τὸ  $\Gamma Z$  πρὸς τὸ  $Z\Delta$ .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν  $AE EB \Gamma Z Z\Delta$  ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ  $H\Theta \Theta K \Lambda M MN$ · τῶν δὲ  $EB Z\Delta$  ἄλλα ἢ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ  $K\Xi N\Pi$ .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $H\Theta$  τοῦ  $AE$  καὶ τὸ  $\Theta K$  τοῦ  $EB$ · ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὰ  $H\Theta$  τοῦ  $AE$  καὶ τὸ  $H K$  τοῦ  $AB$ . Ἰσάκις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $H\Theta$  τοῦ  $AE$  καὶ τὸ  $\Lambda M$

τοῦ ΓΖ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΓΔ. Ἰσάκεις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΓΔ· τὰ ΗΚ ΑΝ ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ· καὶ συνεπὲς τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ ΓΔ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ ΑΝ, τῶν δὲ ΕΒ ΖΔ ἄλλα ἢ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ ΘΞ, ΜΠ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΚ ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. Ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχοντος ἄρα καὶ τοῦ ΑΝ τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΝΠ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ ΑΜ τῷ ΝΠ· καὶ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν ΗΘ ΑΜ τῶν ΑΕ ΓΖ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ ΚΞ ΝΠ τῶν ΕΒ ΖΔ ἄλλα ἢ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ἢ . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις ιη.

Ἐὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ 18.  
συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ  $AE$   $EB$  Fig. 18.  
 $GZ$   $ZΔ$ , ὡς τὸ  $AE$  πρὸς τὸ  $EB$ , οὕτως τὸ  $GZ$  πρὸς  
τὸ  $ZΔ$ . λέγω ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται,  
ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $BE$ , οὕτως τὸ  $ΓΔ$  πρὸς τὸ  $ZΔ$ .

Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $BE$ , οὕ-  
τως τὸ  $ΓΔ$  πρὸς τὸ  $ZΔ$ . ἔσται ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  
 $BE$ , οὕτως τὸ  $ΓΔ$  ἤτοι πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ  $ΔZ$ , ἢ  
πρὸς μείζον.

Ἐστω πρότερον πρὸς ἑλασσόν τὸ  $ΔH$ . Καὶ ἐπεὶ  
ἔστιν ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $BE$ , οὕτως τὸ  $ΓΔ$  πρὸς τὸ  
 $ΔH$ , συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. ὥστε καὶ  
διαίρεθέντα ἀνάλογον ἔσται. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $AE$   
πρὸς τὸ  $EB$ , οὕτως τὸ  $ΓH$  πρὸς τὸ  $HΔ$ . Ὑπόκειται  
δὲ καὶ ὡς τὸ  $AE$  πρὸς τὸ  $EB$ , οὕτως τὸ  $GZ$  πρὸς  
τὸ  $ZΔ$ . καὶ ὡς ἄρα τὸ  $ΓH$  πρὸς τὸ  $HΔ$  οὕτως τὸ  
 $GZ$  πρὸς τὸ  $ZΔ$ . Μείζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ  $ΓH$  τοῦ  
τρίτου τοῦ  $GZ$ . μείζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ  $HΔ$   
τοῦ τετάρτου τοῦ  $ZΔ$ . Ἀλλὰ καὶ ἑλάττον, ὅπερ ἐστὶν  
ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔστιν ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $BE$ ,  
οὕτως τὸ  $ΓΔ$  πρὸς ἑλασσόν τοῦ  $ZΔ$ . Ὁμοίως δὲ  
δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον. πρὸς αὐτὸ ἄρα.

Ἐὰν ἄρα διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ . . .  
καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις ιθ.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαι- 19.  
ρεθέν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς  
τὸ λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἐστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ  $AB$  πρὸς ὅλον τὸ  $ΓΔ$ , Fig. 19.  
οὕτως ἀφαιρεθέν τὸ  $AE$  πρὸς ἀφαιρεθέν τὸ  $GZ$ .  
λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ  $EB$  πρὸς λοιπὸν τὸ  $ZΔ$  ἔσται,  
ὡς ὅλον τὸ  $AB$  πρὸς ὅλον τὸ  $ΓΔ$ .

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $ΓΔ$ , οὕτως τὸ  $AE$  πρὸς τὸ  $ΓΖ$ . καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ  $BA$  πρὸς τὸ  $AE$ , οὕτως τὸ  $ΔΓ$  πρὸς τὸ  $ΓΖ$ . Καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὡς ἄρα τὸ  $BE$  πρὸς τὸ  $EA$ , οὕτως τὸ  $ΔΖ$  πρὸς τὸ  $ΖΓ$ , καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ  $BE$  πρὸς τὸ  $ΔΖ$ , οὕτως τὸ  $EA$  πρὸς τὸ  $ΖΓ$ . Ὡς δὲ τὸ  $AE$  πρὸς τὸ  $ΓΖ$ , οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ  $AB$  πρὸς ὅλον τὸ  $ΓΔ$ . καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ  $EB$  πρὸς λοιπὸν τὸ  $ΔΖ$  ἔσται ὡς ὅλον τὸ  $AB$  πρὸς ὅλον τὸ  $ΓΔ$ .

Ἐὰν ἄρα ᾗ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται.

### Πρότασις κ.

Ἐὰν ᾗ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα 20. τὸ πλῆθος, καὶ σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, διῷσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ᾗ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἑκτοῦ μείζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἑλάσσον, ἑλάσσον.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ  $A B Γ$ , καὶ ἄλλα αὐ- Fig. 20 τοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ  $Δ E Z$ , σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $Δ$  πρὸς τὸ  $E$ , ὡς δὲ τὸ  $B$  πρὸς τὸ  $Γ$ , οὕτως τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ , διῷσου δὲ μείζον ἔστω τὸ  $A$  τοῦ  $Γ$ . λέγω ὅτι καὶ τὸ  $Δ$  τοῦ  $Z$  μείζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἑλάσσον, ἑλάσσον.

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ  $A$  τοῦ  $Γ$ , ἄλλο δὲ τι τὸ  $B$ , τὸ δὲ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ ἑλάττον· τὸ  $A$  ἄρα πρὸς τὸ  $B$  μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ  $Γ$  πρὸς τὸ  $B$ . Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ



$A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  $E$ , ὥς δὲ τὸ  $I$  πρὸς τὸ  $B$ , ἀνάπαλιν οὕτως τὸ  $Z$  πρὸς τὸ  $E$ . καὶ τὸ  $\Delta$  ἄρα πρὸς τὸ  $E$  μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ  $Z$  πρὸς τὸ  $E$ . Τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μείζον ἐστὶ· μείζον ἄρα τὸ  $\Delta$  τοῦ  $Z$ . Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ  $A$  τῷ  $\Gamma$ , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ  $\Delta$  τῷ  $Z$ . καὶ ἑλάττον, ἑλάττον.

Ἐὰν ἄρα ἢ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα . . . καὶ τὸ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις κα.

Ἐὰν ἢ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς 21.  
ἴσα τὸ πλῆθος καὶ σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ τετραραγμένη αὐτῶν ἢ ἀναλογία, διῶσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ. καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἑκτου μείζον ἐστὶ· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἑλάσσον, ἑλάσσον.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ  $A B \Gamma$ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς 21.  
ἴσα τὸ πλῆθος τὰ  $\Delta E Z$ , σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τετραραγμένη αὐτῶν ἢ ἀναλογία, ὥς μὲν τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ , ὥς δὲ τὸ  $B$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  $E$ , διῶσου δὲ τὸ  $A$  τοῦ  $\Gamma$  μείζον ἐστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ  $\Delta$  τοῦ  $Z$  μείζον ἐστὶ· καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἑλάττον, ἑλάττον.

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ  $A$  τοῦ  $\Gamma$ , ἄλλο δέ τι τὸ  $B$ . τὸ  $A$  ἄρα πρὸς τὸ  $B$  μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $B$ . Ἀλλ' ὥς μὲν τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ , ὥς δὲ τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $B$ , ἀνάπαλιν οὕτως τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $\Delta$ . καὶ τὸ  $E$  ἄρα πρὸς τὸ  $Z$  μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $\Delta$ . Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἑλασσόν ἐστιν· ἑλασσόν ἄρα ἐστὶ τὸ  $Z$  τοῦ  $\Delta$ . μείζον ἄρα τὸ

τὸ  $\Delta$  τοῦ  $Z$ . Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ  $A$  τῷ  $\Gamma$ , ἴσον ἔσται καὶ τὸ  $\Delta$  τῷ  $Z$ . καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐὰν ἄρα ἢ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ.

Ἐὰν ἢ ὅποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ διῴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται. 22.

Ἐστω ὅποσαοῦν μεγέθη τὰ  $A B \Gamma$ , καὶ ἄλλα Fig. 22. αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ  $\Delta E Z$  σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  $E$ , ὡς δὲ τὸ  $B$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ . λέγω ὅτι καὶ διῴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται, ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  $Z$ .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν  $A \Delta$  ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $H \Theta$ , τῶν δὲ  $B E$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $K \Lambda$ , καὶ ἔτι τῶν  $\Gamma Z$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $M N$ .

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  $E$ , καὶ εἰληπται τῶν μὲν  $A \Delta$  ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $H \Theta$ , τῶν δὲ  $B E$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $K \Lambda$ . ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $H$  πρὸς τὸ  $K$ , οὕτως τὸ  $\Theta$  πρὸς τὸ  $\Lambda$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ  $K$  πρὸς τὸ  $M$ , οὕτως τὸ  $\Lambda$  πρὸς τὸ  $N$ . Ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ  $H K M$ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ  $\Theta \Lambda N$  καὶ σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· διῴσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ  $H$  τοῦ  $M$ , ὑπερέχει καὶ τὸ  $\Theta$  τοῦ  $N$ . καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν  $H \Theta$  τῶν  $A \Delta$  ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ  $M N$  τῶν  $\Gamma Z$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  $Z$ .

Ἐὰν ἄρα ἢ ὅποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις κγ.

Ἐὰν ἢ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα 23.  
τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐ-  
τῷ λόγῳ, ἢ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀνα-  
λογία· καὶ διῦσον ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ  $A B \Gamma$ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς *Fig. 23.*  
ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λό-  
γῳ τὰ  $\Delta E Z$ , ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀνα-  
λογία, ὡς μὲν τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $E$  πρὸς τὸ  
 $Z$ , ὡς δὲ τὸ  $B$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  $E$ .  
λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  $Z$ .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν  $A B \Delta$  ἰσάκεις πολλαπλά-  
σια τὰ  $H \Theta K$ , τῶν δὲ  $\Gamma E Z$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσά-  
κεις πολλαπλάσια τὰ  $\Lambda M N$ .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ  $H \Theta$  τῶν  
 $A B$ , τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν  
αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ ,  
οὕτως τὸ  $H$  πρὸς τὸ  $\Theta$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς  
τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ , οὕτως τὸ  $M$  πρὸς τὸ  $N$ · καὶ ἐστὶν  
ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ , οὕτως τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ · καὶ ὡς  
ἄρα τὸ  $H$  πρὸς τὸ  $\Theta$ , οὕτως τὸ  $M$  πρὸς τὸ  $N$ . Καὶ  
ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ  $B$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  
 $E$ · καὶ ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ  $B$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , οὕτως τὸ  $\Gamma$  πρὸς  
τὸ  $E$ . Καὶ ἐπεὶ τὰ  $\Theta K$  τῶν  $B \Delta$  ἰσάκεις ἐστὶ πολ-  
λαπλάσια, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν  
αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ  $B$  πρὸς τὸ  $\Delta$ ,  
οὕτως τὸ  $\Theta$  πρὸς τὸ  $K$ · ἀλλ' ὡς τὸ  $B$  πρὸς τὸ  $\Delta$ ,  
οὕτως τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $E$ · καὶ ὡς ἄρα τὸ  $\Theta$  πρὸς τὸ  
 $K$ , οὕτως τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $E$ . Πάλιν, ἐπεὶ τὰ  $\Lambda M$   
τῶν  $\Gamma E$  ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ  
 $\Gamma$  πρὸς τὸ  $E$ , οὕτως τὸ  $\Lambda$  πρὸς τὸ  $M$ . Ἀλλ' ὡς τὸ  
 $\Gamma$  πρὸς τὸ  $E$ , οὕτως τὸ  $\Theta$  πρὸς τὸ  $K$ · καὶ ὡς ἄρα  
τὸ  $\Theta$  πρὸς τὸ  $K$ , οὕτως τὸ  $\Lambda$  πρὸς τὸ  $M$ , καὶ ἐναλ-  
λάξ ὡς τὸ  $\Theta$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , οὕτως τὸ  $K$  πρὸς τὸ  $M$ .

Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ  $H$  πρὸς τὸ  $\Theta$ , οὕτως τὸ  $M$  πρὸς τὸ  $N$ . ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ  $H$   $\Theta$   $A$ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ  $K$   $M$   $N$  συνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἐστὶν αὐτῶν τεταραγμένη ἢ ἀναλογία. διῶσον ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ  $H$  τοῦ  $A$ , ὑπερέχει καὶ τὸ  $K$  τοῦ  $N$ . καὶ εἰ ἴσον, ἴσον. καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν  $H$   $K$  τῶν  $A$   $\Delta$  ἰσάκως πολλαπλάσια, τὰ δὲ  $A$   $N$  τῶν  $\Gamma$   $Z$ . ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  $Z$ .

Ἐὰν ἄρα ἢ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κδ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν 24. ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον. καὶ συντεθέν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Πρῶτον γὰρ τὸ  $AB$  πρὸς δεύτερον τὸ  $\Gamma$  τὸν Fig. 24. αὐτὸν ἔχτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ  $AE$  πρὸς τέταρτον τὸ  $Z$ . ἔχτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ  $BH$  πρὸς δεύτερον τὸ  $\Gamma$  τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον τὸ  $E\Theta$  πρὸς τέταρτον τὸ  $Z$ . λέγω ὅτι καὶ συντεθέν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ  $AH$  πρὸς δεύτερον τὸ  $\Gamma$  τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ  $\Delta\Theta$  πρὸς τέταρτον τὸ  $Z$ .

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ  $BH$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $E\Theta$  πρὸς τὸ  $Z$ . ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $BH$ , οὕτως τὸ  $Z$  πρὸς τὸ  $E\Theta$ . Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $AE$  πρὸς τὸ  $Z$ , ὡς δὲ τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $BH$ , οὕτως τὸ  $Z$  πρὸς τὸ  $E\Theta$ . διῶσον ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $BH$ , οὕτως τὸ  $AE$  πρὸς τὸ  $E\Theta$ . Καὶ ἐπεὶ διηρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ

συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $AH$  πρὸς τὸ  $BH$ , οὕτως τὸ  $\Delta\Theta$  πρὸς τὸ  $\Theta E$ . Ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ  $BH$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $E\Theta$  πρὸς τὸ  $Z$ . διῶσον ἄρα ἔστιν ὡς τὸ  $AH$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $\Delta\Theta$  πρὸς τὸ  $Z$ .

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κε.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ 25.  
μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῶν δύο λοιπῶν  
μείζονά ἐστιν.

Ἐστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ  $AB$   $\Gamma\Delta$  *Fig. 25.*  
 $E$   $Z$ , ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $\Gamma\Delta$ , οὕτως τὸ  $E$  πρὸς τὸ  
 $Z$ . ἔστω δὲ μέγιστον μὲν αὐτῶν τὸ  $AB$ , ἐλάχιστον δὲ  
τὸ  $Z$ . λέγω ὅτι τὰ  $AB$   $Z$  τῶν  $\Gamma\Delta$   $E$  μείζονά ἐστι.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν  $E$  ἴσον τὸ  $AH$ , τῷ δὲ  $Z$   
ἴσον τὸ  $\Gamma\Theta$ .

Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $\Gamma\Delta$ , οὕτως  
τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$ , ἴσον δὲ τὸ μὲν  $E$  τῷ  $AH$ , τὸ δὲ  
 $Z$  τῷ  $\Gamma\Theta$ . ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $\Gamma\Delta$ , οὕτως  
τὸ  $AH$  πρὸς τὸ  $\Gamma\Theta$ . Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὅλον τὸ  
 $AB$  πρὸς ὅλον τὸ  $\Gamma\Delta$ , οὕτως ἀφαιρεθέν τὸ  $AH$  πρὸς  
ἀφαιρεθέν τὸ  $\Gamma\Theta$ . καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ  $HB$  πρὸς λοι-  
πὸν τὸ  $\Theta\Delta$  ἔσται ὡς ὅλον τὸ  $AB$  πρὸς ὅλον τὸ  $\Gamma\Delta$ .  
Μεῖζον δὲ τὸ  $AB$  τοῦ  $\Gamma\Delta$ . μεῖζον ἄρα καὶ τὸ  $HB$   
τοῦ  $\Theta\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν  $AH$  τῷ  $E$ , τὸ  
δὲ  $\Gamma\Theta$  τῷ  $Z$ . τὰ ἄρα  $AH$   $Z$  ἴσα ἐστὶ τοῖς  $\Gamma\Theta$   $E$ .  
Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἄνισα  
ἔστί· Ἐὰν ἄρα, τῶν  $HB$   $\Theta\Delta$  ἀνίσων ὄντων καὶ μεί-  
ζονος τοῦ  $HB$ , τῷ μὲν  $HB$  προστεθῇ τὰ  $AH$   $Z$ , τῷ  
δὲ  $\Theta\Delta$  προστεθῇ τὰ  $\Gamma\Theta$   $E$ . συνάγεται τὰ  $AB$   $Z$   
μείζονα τῶν  $\Gamma\Delta$   $E$ .

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον . . . καὶ τὰ  
ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ πέμπτου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ  
ΒΙΒΛΙΟΝ ἙΚΤΟΝ.

~~~~~

Ὅροι.

- α. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, 1.
ὅσα τὰς τε γωνίας ἴσας ἔχει, κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ
τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.
- β. Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν. ὅταν 2.
ἐκατέρω τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἐπόμενοι
λόγων ὅροι ᾖσιν.
- γ. Ἀκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τε- 3.
τμηθεῖν λέγεται, ὅταν ἡ ὥς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μείζον
τμήμα, οὕτως τὸ μείζον πρὸς τὸ ἔλασσον.
- δ. Ὑψος ἐστὶ πάντος σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς 4.
κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.
- ε. (Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ 5.
τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖ-
σαι ποιῶσί τινα.)

~~~~~  
Πρότασις α.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα 1.  
τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἀλληλά  
ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστω τρίγωνα μὲν τὰ  $ABΓ$   $ΑΓΔ$ , παραλληλό- Fig. 1.  
γραμμα δὲ τὰ  $ΕΓ$   $ΓΖ$  ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τὸ  
 $ΑΓ$ . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ  $ΒΓ$  βάσις πρὸς τὴν  $ΓΔ$   
βάσιν, οὕτως τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΑΓΔ$  τρί-

γωνον, καὶ τὸ  $ΕΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΖ$  παραλληλόγραμμον.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ  $ΒΔ$  ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ  $Θ Α$  σημεία, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν  $ΒΓ$  βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ  $ΒΗ ΗΘ$ , τῇ δὲ  $ΓΔ$  βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ  $ΔΚ ΚΛ$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $ΑΗ ΑΘ ΑΚ ΑΛ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ  $ΓΒ ΒΗ ΗΘ$  ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ  $ΑΘΗ ΑΗΒ ΑΒΓ$  τρίγωνα ἀλλήλοις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΘΓ$  βάσις τῆς  $ΒΓ$  βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστὶ καὶ τὸ  $ΑΘΓ$  τρίγωνον τοῦ  $ΑΒΓ$  τριγώνου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ  $ΓΔ$  βάσις τῆς  $ΓΔ$  βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστὶ καὶ τὸ  $ΑΛΓ$  τρίγωνον τοῦ  $ΑΓΔ$  τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΘΓ$  βάσις τῇ  $ΓΔ$  βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ  $ΑΘΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΑΛΓ$  τριγώνῳ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ  $ΘΓ$  βάσις τῆς  $ΓΔ$  βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ  $ΑΘΓ$  τρίγωνον τοῦ  $ΑΛΓ$  τριγώνου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν  $ΒΓ ΓΔ$ , δύο δὲ τριγώνων τῶν  $ΑΒΓ ΑΓΔ$ , εἵληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια, τῆς μὲν  $ΒΓ$  βάσεως καὶ τοῦ  $ΑΒΓ$  τριγώνου ἥτε  $ΘΓ$  βάσις καὶ τὸ  $ΑΘΓ$  τρίγωνον, τῆς δὲ  $ΓΔ$  βάσεως καὶ τοῦ  $ΑΓΔ$  τριγώνου ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια ἥτε  $ΓΔ$  βάσις καὶ τὸ  $ΑΛΓ$  τρίγωνον· καὶ δέδεικται ὅτι, εἰ ὑπερέχει ἡ  $ΘΓ$  βάσις τῆς  $ΓΔ$  βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ  $ΑΘΓ$  τρίγωνον τοῦ  $ΑΛΓ$  τριγώνου· καὶ εἰ ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἐλάττων, ἐλάττων· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $ΒΓ$  βάσις πρὸς τὴν  $ΓΔ$  βάσιν, οὕτως τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΑΓΔ$  τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν  $ΑΒΓ$  τριγώνου διπλάσιόν ἐστὶ τὸ  $ΕΓ$  παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ  $ΑΓΔ$  τριγώνου διπλάσιόν ἐστὶ τὸ  $Ζ Γ$  παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσανύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει

λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΑΓΔ$  τρίγωνον, οὕτως τὸ  $ΕΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΖΓ$  παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ  $ΒΓ$  βάσις πρὸς τὴν  $ΓΔ$ , οὕτως τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΑΓΔ$ , ὡς δὲ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΑΓΔ$  τρίγωνον, οὕτως τὸ  $ΕΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΖΓ$  παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα ἡ  $ΒΓ$  βάσις πρὸς τὴν  $ΓΔ$  βάσιν, οὕτως τὸ  $ΕΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΖΓ$  παραλληλόγραμμον.

Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἀλληλά ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις β.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν 2.  
ἀχθῇ τις εὐθεΐα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς λοι-  
πὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ  
τριγώνου δύο πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν,  
ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεΐα παρὰ  
τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.

Τριγώνου γάρ τοῦ  $ABΓ$  παράλληλος μιᾷ τῶν Fig. 2.  
πλευρῶν τῇ  $ΒΓ$  ἤχθω ἡ  $ΔΕ$ · λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ  
 $ΒΔ$  πρὸς τὴν  $ΔΑ$ , οὕτως ἡ  $ΓΕ$  πρὸς τὴν  $ΕΑ$ .

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ  $ΒΕ$   $ΓΔ$ .

Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ  $ΒΔΕ$  τρίγωνον τῷ  $ΓΔΕ$  τριγώνῳ·  
ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστὶ τῆς  $ΔΕ$  καὶ ἐν ταῖς αὐ-  
ταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΔΕ$   $ΒΓ$ · ἄλλο δέ τι τὸ  $ΑΔΕ$   
τρίγωνον. Τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον  
ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ  $ΒΔΕ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΑΔΕ$  τρίγωνον,  
οὕτως τὸ  $ΓΔΕ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΑΔΕ$  τρίγωνον.  
Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ  $ΒΔΕ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΑΔΕ$ , οὕτως  
ἡ  $ΒΔ$  πρὸς τὴν  $ΔΑ$ · ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα,  
τὴν ἀπὸ τοῦ  $Ε$  ἐπὶ τὴν  $AB$  κάθετον ἀγομένην, πρὸς  
ἀλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς τὸ



ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΔΕ, οὕτως ἢ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὥς ἄρα ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἢ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Δ Ε σημεία, ὥς ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἢ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστιν ὥς ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἢ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὥς μὲν ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΔΕ, ὥς δὲ ἢ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΔΕ· καὶ ὥς ἄρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΔΕ, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΔΕ. Ἐκάτερον ἄρα τῶν ΒΔΕ ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΔΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. Ἰσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καὶ εἰσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. Τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστί. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου παρὰ μίαν . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὥς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις γ'.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἢ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνη καὶ τὴν βάσιν· τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

3.

Ἐστώ τρίγωνον τὸ  $ABΓ$ , καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ  $Fig. 3.$   
 $BAΓ$  γωνία δίχα ὑπὸ τῆς  $AD$  εὐθείας· λέγω ὅτι  
 ἐστὶν ὡς ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $ΔΓ$ , οὕτως ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $AG$ .

Ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ  $Γ$  τῇ  $AD$  παραλλήλος ἡ  
 $ΓΕ$ , καὶ διαχθεῖσα ἡ  $BA$  συμπίπτει αὐτῇ κατὰ τὸ  $E$ .

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς  $AD$   $ΕΓ$  εὐθεῖα  
 ἐνέπεσεν ἡ  $AG$ · ἡ ἄρα ὑπὸ  $AGΕ$  γωνία ἴση ἐστὶ  
 τῇ ὑπὸ  $ΓAD$ . Ἀλλ' ἡ ὑπὸ  $ΓAD$  τῇ ὑπὸ  $BAΔ$  ὑπό-  
 κείται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ  $BAΔ$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $AGΕ$  ἐστὶν  
 ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς  $AD$   $ΕΓ$  εὐ-  
 θεῖα ἐνέπεσεν ἡ  $BAE$ · ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  $BAΔ$   
 ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ  $AEΓ$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ  
 ὑπὸ  $AGΕ$  τῇ ὑπὸ  $BAΔ$  ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ  $AGΕ$  ἄρα  
 γωνία τῇ ὑπὸ  $AEΓ$  ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ  
 $AE$  πλευρᾷ τῇ  $AG$  ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ τρίγωνον  
 τοῦ  $BΓΕ$  παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν  $ΕΓ$  ἥκται ἡ  
 $AD$ · ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $ΔΓ$ ,  
 οὕτως ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $AE$ . Ἰση δὲ ἡ  $AE$  τῇ  $AG$ ·  
 ὥς ἄρα ἐστὶν ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $ΔΓ$ , οὕτως ἡ  $BA$  πρὸς  
 τὴν  $AG$ .

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $ΔΓ$ , οὕτως  
 ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $AG$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $AD$ · λέγω  
 ὅτι δίχα τέμνεται ἡ ὑπὸ  $BAΓ$  γωνία ὑπὸ τῆς  $AD$   
 εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν  
 ὡς ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $ΔΓ$ , οὕτως ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $AG$ ,  
 ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $ΔΓ$ , οὕτως ἐστὶν ἡ  $BA$   
 πρὸς τὴν  $AE$ · τρίγωνον γὰρ τοῦ  $BΓΕ$  παρὰ μίαν  
 τῶν πλευρῶν τὴν  $ΕΓ$  ἥκται ἡ  $AD$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ  
 $BA$  πρὸς τὴν  $AG$ , οὕτως ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $AE$ · ἴση  
 ἄρα ἡ  $AG$  τῇ  $AE$ , ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $AEΓ$  γω-  
 νία τῇ ὑπὸ  $AGΕ$  ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ  $AEΓ$   
 τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ  $BAΔ$  ἐστὶν ἴση, ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  
 $AGΕ$  τῇ ἐναλλάξ τῇ ὑπὸ  $ΓAD$ · καὶ ἡ ὑπὸ  $BAΔ$

ἄρα τῇ ὑπὸ  $\Gamma\Delta\Delta$  ἐστὶν ἴση. Ἡ ἄρα ὑπὸ  $\ΒΑΓ$  γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς  $\Delta\Delta$  εὐθείας.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα αὐτὴν εὐθεῖα τέμνη . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις δ.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰ- 4.  
σιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ  
ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

Ἐστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ  $ΑΒΓ$   $\Delta ΓΕ$  ἴσην Fig. 4  
ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ  $\ΒΑΓ$  γωνίαν τῇ ὑπὸ  $\Gamma\Delta Ε$ , τὴν  
δὲ ὑπὸ  $\Delta ΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $\Delta ΕΓ$ , καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ  $ΑΒΓ$   
τῇ ὑπὸ  $\Delta ΓΕ$ . λέγω ὅτι τῶν  $ΑΒΓ$   $\Delta ΓΕ$  τριγώνων  
ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας,  
καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ  $ΒΓ$  τῇ  $ΓΕ$ . Καὶ  
ἐπεὶ αἱ ὑπὸ  $ΑΒΓ$   $\Delta ΓΒ$  γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσον-  
ες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ  $\Delta ΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $\Delta ΕΓ$ , αἱ  
ἄρα ὑπὸ  $ΑΒΓ$   $\Delta ΕΓ$  δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν. αἱ  
 $ΒΑ$   $ΕΔ$  ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Ἐκβε-  
βλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ  $Ζ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $\Delta ΓΕ$  γωνία τῇ ὑπὸ  
 $ΑΒΓ$ , παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΒΖ$  τῇ  $ΓΔ$ . Πάλιν,  
ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $\Delta ΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $\Delta ΕΓ$ , παράλλη-  
λός ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΖΕ$ . παραλληλόγραμμον ἄρα  
ἐστὶ τὸ  $ΖΑΓΔ$ . ἴση ἄρα ἡ μὲν  $ΖΑ$  τῇ  $\Delta Γ$ , ἡ δὲ  
 $ΑΓ$  τῇ  $ΖΔ$ . Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  $ΖΒΕ$  παρὰ  
μίαν τῶν πλευρῶν τὴν  $ΖΕ$  ἤπται ἡ  $ΑΓ$ , ἔστιν ἄρα  
ὡς ἡ  $ΒΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΖ$ , οὕτως ἡ  $ΒΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΕ$ .  
Ἰση δὲ ἡ  $ΑΖ$  τῇ  $ΓΔ$ . ὡς ἄρα ἡ  $ΒΑ$  πρὸς τὴν  $ΓΔ$ ,  
οὕτως ἡ  $ΒΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΕ$ , καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ  $ΑΒ$   
πρὸς τὴν  $ΒΓ$ , οὕτως ἡ  $\Delta Γ$  πρὸς τὴν  $ΓΕ$ . Πάλιν,

ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ  $\Gamma\Delta$  τῇ  $BZ$ , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $B\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Gamma E$ , οὕτως ἡ  $Z\Delta$  πρὸς τὴν  $\Delta E$ . Ἰση δὲ ἡ  $Z\Delta$  τῇ  $ΑΓ$ . ὡς ἄρα ἡ  $B\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Gamma E$ , οὕτως ἡ  $ΑΓ$  πρὸς τὴν  $E\Delta$ , καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ  $B\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Gamma A$ , οὕτως ἡ  $\Gamma E$  πρὸς τὴν  $E\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ  $ΑΒ$  πρὸς τὴν  $B\Gamma$ , οὕτως ἡ  $\Delta\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Gamma E$ , ὡς δὲ ἡ  $B\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Gamma A$ , οὕτως ἡ  $\Gamma E$  πρὸς τὴν  $E\Delta$ . καὶ διῶσον ἄρα ὡς ἡ  $ΒΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΓ$ , οὕτως ἡ  $\Gamma\Delta$  πρὸς τὴν  $\Delta E$ .

Τῶν ἄρα ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ε.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. 5.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $ΑΒΓ$   $\Delta E Z$  τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν  $ΑΒ$  πρὸς τὴν  $B\Gamma$ , οὕτως τὴν  $\Delta E$  πρὸς τὴν  $EZ$ , ὡς δὲ τὴν  $B\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Gamma A$ , οὕτως τὴν  $EZ$  πρὸς τὴν  $Z\Delta$ , καὶ ἔτι ὡς τὴν  $ΒΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΓ$ , οὕτως τὴν  $E\Delta$  πρὸς τὴν  $\Delta Z$ . λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔσται τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $\Delta E Z$  τριγώνῳ, καὶ ἴσας ἔξουσι τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, τὴν μὲν ὑπὸ  $ΑΒΓ$  τῇ ὑπὸ  $\Delta E Z$ , τὴν δὲ ὑπὸ  $B\Gamma A$  τῇ ὑπὸ  $EZ\Delta$ , καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $E\Delta Z$ . Fig. 5.

Συνεστιάτω γὰρ πρὸς τῇ  $EZ$  εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς  $E$   $Z$  τῇ μὲν ὑπὸ  $ΑΒΓ$  γωνία ἴση ἡ ὑπὸ  $ZEH$ , τῇ δὲ ὑπὸ  $B\Gamma A$  ἴση ἡ ὑπὸ  $EZH$ . λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  λοιπὴ τῇ ὑπὸ  $E\Delta Z$  ἐστὶν ἴση.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $E\Delta Z$  τριγώνῳ· τῶν ἄρα  $ΑΒΓ$   $E\Delta Z$  τριγώνων ἀνάλογόν

εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμό-  
 λογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσιν. ἔστιν  
 ἄρα ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $BF$ , οὕτως ἡ  $HE$  πρὸς  
 τὴν  $EZ$ . Ἀλλ' ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $BF$ , οὕτως ὑπό-  
 κεῖται ἡ  $AE$  πρὸς τὴν  $EZ$ . ὡς ἄρα ἡ  $AE$  πρὸς  
 τὴν  $EZ$ , οὕτως ἡ  $HE$  πρὸς τὴν  $EZ$ . ἑκατέρα ἄρα  
 τῶν  $AE$   $HE$  πρὸς τὴν  $EZ$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴση  
 ἄρα ἐστὶν ἡ  $AE$  τῇ  $HE$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ  
 $AZ$  τῇ  $HZ$  ἐστὶν ἴση. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ  $AE$  τῇ  
 $EH$ , κοινὴ δὲ ἡ  $EZ$ , δύο δὲ αἱ  $AE$   $EZ$  δυοῖ ταῖς  
 $HE$   $EZ$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ  $ZA$  βάσει τῇ  $ZH$   
 ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $AEZ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $HEZ$   
 ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ  $AEZ$  τρίγωνον τῷ  $HEZ$  τριγώνῳ  
 ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι,  
 ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶ  
 καὶ ἡ μὲν ὑπὸ  $AZE$  γωνία τῇ ὑπὸ  $HZE$ , ἡ δὲ ὑπὸ  
 $EAZ$  τῇ ὑπὸ  $EHZ$ . Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ  $ZEΔ$  τῇ  
 ὑπὸ  $ZEΗ$  ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ  $HEZ$  τῇ ὑπὸ  $ABΓ$   
 ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ  $ABΓ$  ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ  $AEZ$   
 ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  
 $AZE$  ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ  $A$  τῇ πρὸς τῷ  
 $A$  ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $AEZ$   
 τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ...  
 καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις εἰ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γω- 6.  
 νία ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς  
 πλευρὰς ἀνάλογον. ἰσογώνια ἔσται τὰ τρί-  
 γωνα, καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὅφ' ἃς αἱ  
 ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$   $ΔΕΖ$ , μίαν γωνίαν Fig. 6.  
 τὴν ὑπὸ  $ΒΑΓ$  μιᾷ γωνία τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$  ἴσην ἔχοντα,

περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὥς τὴν  $BA$  πρὸς τὴν  $AG$ , οὕτως τὴν  $EA$  πρὸς τὴν  $AZ$ . λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔEZ$  τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἔξει τὴν μὲν ὑπὸ  $ABΓ$  γωνίαν τῇ ὑπὸ  $ΔEZ$ , τὴν δὲ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΔZE$ .

Συνεστάτω γὰρ πρὸς μὲν τῇ  $AZ$  εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς  $A$   $Z$  ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ  $BAΓ$   $EAZ$  γωνιῶν ἴση ἢ ὑπὸ  $ZΔH$ , τῇ δὲ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  ἴση ἢ ὑπὸ  $ΔZH$ . λοιπὴ ἄρα ἢ πρὸς τῷ  $B$  λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ  $H$  ἴση ἐστίν.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔHΖ$  τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὥς ἢ  $BA$  πρὸς τὴν  $AG$ , οὕτως ἢ  $HA$  πρὸς τὴν  $AZ$ . Ὑπόκειται δὲ καὶ ὥς ἢ  $BA$  πρὸς τὴν  $AG$ , οὕτως ἢ  $EA$  πρὸς τὴν  $AZ$ . καὶ ὥς ἄρα ἢ  $EA$  πρὸς τὴν  $AZ$ , οὕτως ἢ  $HA$  πρὸς τὴν  $AZ$ . ἴση ἄρα ἢ  $EA$  τῇ  $ΔH$ , καὶ κοινὴ ἢ  $AZ$ . δύο δὴ αἱ  $EA$   $AZ$  δυοὶ ταῖς  $HA$   $AZ$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ  $EAZ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $HAZ$  ἴση. βάσεις ἄρα ἢ  $EZ$  βάσει τῇ  $ZH$  ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ  $ΔEZ$  τρίγωνον τῷ  $ΔHΖ$  τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ μὲν ὑπὸ  $ΔZH$  τῇ ὑπὸ  $ΔZE$ , ἢ δὲ ὑπὸ  $ΔHΖ$  τῇ ὑπὸ  $ΔEZ$ . Ἀλλ' ἢ ὑπὸ  $ΔZH$  τῇ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  ἐστὶν ἴση, καὶ ἢ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $ΔZE$  ἐστὶν ἴση. Ὑπόκειται δὲ καὶ ἢ ὑπὸ  $BAΓ$  τῇ ὑπὸ  $EAZ$  ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ πρὸς τῷ  $B$  λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ  $E$  ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔEZ$  τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὥς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις ζ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνία ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἢτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὁρθῆς ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$   $ΔΕΖ$  μίαν γωνίαν μιᾷ γωνία ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$ , περὶ δὲ ἄλλας γωνίας, τὰς ὑπὸ  $ΑΒΓ$   $ΔΕΖ$ , τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὥς τὴν  $ΑΒ$  πρὸς τὴν  $ΒΓ$ , οὕτως τὴν  $ΔΕ$  πρὸς τὴν  $ΕΖ$ , τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς  $Γ$   $Ζ$  πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὁρθῆς· λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔσται τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ  $ΑΒΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΔΕΖ$ , καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ  $Γ$  λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ  $Ζ$  ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ  $ΑΒΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΔΕΖ$ · μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ  $ΑΒΓ$ · καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ  $ΑΒ$  εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $Β$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΖ$  γωνία ἴση ἢ ὑπὸ  $ΑΒΗ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $Α$  γωνία τῇ  $Δ$ · ἡ δὲ ὑπὸ  $ΑΒΗ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΖ$ , λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΗΒ$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $ΔΖΕ$  ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΑΒΗ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὥς ἡ  $ΑΒ$  πρὸς τὴν  $ΒΗ$ , οὕτως ἡ  $ΔΕ$  πρὸς τὴν  $ΕΖ$ . Ὡς δὲ ἡ  $ΔΕ$  πρὸς τὴν  $ΕΖ$ , οὕτως ὑπόκειται ἡ  $ΑΒ$  πρὸς τὴν  $ΒΓ$ · καὶ ὥς ἄρα ἡ  $ΑΒ$  πρὸς τὴν  $ΒΓ$ , οὕτως ἡ  $ΑΒ$  πρὸς τὴν  $ΒΗ$ , ἡ  $ΑΒ$  ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν  $ΒΓ$   $ΒΗ$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΒΓ$  τῇ  $ΒΗ$ · ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ  $Γ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΒΗΓ$  ἐστὶν ἴση. Ἐλάττων δὲ ὁρθῆς ὑπόκειται ἡ

πρὸς τῷ  $\Gamma$ · ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ  $B\Gamma$ , ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ  $AHB$  μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ  $Z$ , καὶ ἡ πρὸς τῷ  $Z$  ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ὀρθῆς, ὅπερ ἄτοπον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $AB\Gamma$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\Delta EZ$ , ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ  $A$  ἴση τῇ πρὸς τῷ  $\Delta$ , καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ  $\Gamma$  λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ  $Z$  ἴση ἐστὶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $\Delta EZ$  τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς  $\Gamma$   $Z$  μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $\Delta EZ$  τριγώνῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ  $B\Gamma$  τῇ  $BH$ · ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ  $\Gamma$  τῇ ὑπὸ  $B\Gamma$  ἴση ἐστὶν. Οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ  $\Gamma$ , οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ  $B\Gamma$ . Τριγώνου δὲ τοῦ  $B\Gamma$  αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὔκ εἰσιν ἐλάττονες, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $AB\Gamma$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\Delta EZ$ · ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ  $A$  τῇ πρὸς τῷ  $\Delta$  ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ  $\Gamma$  λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ  $Z$  ἴση ἐστὶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τριγώνον τῷ  $\Delta EZ$  τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνία . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις η.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὁμοιά ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. 8



Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ  $AB\Gamma$  ὀρθὴν *Fig. 8.* ἔχον τὴν ὑπὸ  $BA\Gamma$  γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ  $A$  ἐπὶ τὴν  $B\Gamma$  κάθετος ἡ  $AD$ . λέγω ὅτι ὁμοίων ἐστὶν ἑκάτερον τῶν  $AB\Delta$   $A\Delta\Gamma$  τριγώνων ὅλῳ τῷ  $AB\Gamma$  καὶ ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $BA\Gamma$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ADB$ , ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε  $AB\Gamma$  καὶ τοῦ  $AB\Delta$  ἡ πρὸς τῷ  $B$ . λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $AGB$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $BAD$  ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $AB\Delta$  τριγώνῳ. Ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ  $B\Gamma$  ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου πρὸς τὴν  $BA$  ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ  $AB\Delta$  τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ  $AB$  ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ  $\Gamma$  γωνίαν τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου πρὸς τὴν  $B\Delta$  ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$ , τὴν ὑπὸ  $BAD$  τοῦ  $AB\Delta$  τριγώνου, καὶ ἔτι ἡ  $AG$  πρὸς τὴν  $AD$  ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ  $B$  γωνίαν, κοινήν αὐτῶν τῶν δύο τριγώνων. τὸ  $AB\Gamma$  ἄρα τρίγωνον τῷ  $AB\Delta$  τριγώνῳ ἰσογώνιον τέ ἐστι, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $AB\Delta$  τριγώνῳ. Ὀμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ  $A\Delta\Gamma$  τριγώνῳ ὁμοίων ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον. ἑκάτερον ἄρα τῶν  $AB\Delta$   $A\Delta\Gamma$  τριγώνων ὁμοίων ἐστὶν ὅλῳ τῷ  $AB\Gamma$  τριγώνῳ.

Λέγω δὲ, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὁμοια τὰ  $AB\Delta$   $A\Delta\Gamma$  τρίγωνα.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ  $BDA$  ὀρθὴ τῇ ὑπὸ  $A\Delta\Gamma$  ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ  $BAD$  τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$  ἐδείχθη ἴση. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ  $B$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $A\Delta\Gamma$  ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB\Delta$  τρίγωνον τῷ  $A\Delta\Gamma$  τριγώνῳ. Ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ  $B\Delta$  τοῦ  $AB\Delta$  τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ  $BAD$  πρὸς τὴν  $DA$  τοῦ  $A\Delta\Gamma$  τριγώνου ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ  $\Gamma$  γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ  $BAD$ , οὕτως αὐτὴ ἡ  $AD$   
τοῦ

τοῦ  $ΑΒΔ$  τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ  $Β$  γωνίαν, πρὸς τὴν  $ΔΓ$  ὑποτείνουσας τὴν ὑπὸ  $ΔΑΓ$  τοῦ  $ΑΔΓ$  τριγώνου, ἴσην τῇ πρὸς τῷ  $Β$ · καὶ ἔτι ἡ  $ΒΑ$  ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ  $ΑΔΒ$  πρὸς τὴν  $ΑΓ$  ὑποτείνουσας τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ  $ΑΔΓ$ · ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΑΒΔ$  τρίγωνον τῷ  $ΑΔΓ$  τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἐνὸς ὁποτέρου τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

### Πρότασις θ'.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν 9. μέρος ἀφελεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $ΑΒ$ · δεῖ δὲ τῆς  $ΑΒ$  Fig. 9. τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἐπιτετάχθω δὲ τὸ τρίτον· καὶ διήχθω τις εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ  $Α$  ἡ  $ΑΓ$ , γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς  $ΑΒ$  τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς  $ΑΓ$  τὸ  $Δ$ , καὶ κείσθωσαν τῇ  $ΑΔ$  ἴσαι αἱ  $ΔΕ$   $ΕΓ$ · καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΒΓ$ , καὶ διὰ τοῦ  $Δ$  παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ  $ΔΖ$ .

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ  $ΑΒΓ$  παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν  $ΒΓ$  ἤκται ἡ  $ΖΔ$ · ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $ΓΔ$  πρὸς τὴν  $ΔΑ$ , οὕτως ἡ  $ΒΖ$  πρὸς τὴν  $ΖΑ$ . Διπλῇ δὲ ἡ  $ΓΔ$  τῆς  $ΔΑ$ · διπλῇ ἄρα καὶ ἡ  $ΒΖ$  τῆς  $ΖΑ$ · τριπλῇ ἄρα ἡ  $ΒΑ$  τῆς  $ΑΖ$ .

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς  $ΑΒ$  τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφήρηται τὸ  $ΑΖ$ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

## Πρότασις ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δο- 10.  
θείσῃ εὐθείᾳ τετμημένη ὁμοίως τεμεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ  $AB$ , ἡ Fig. 10.  
δὲ τετμημένη ἡ  $AG$ , κατὰ τὰ  $\Delta$   $E$  σημεία· δεῖ δὴ  
τὴν  $AB$  ἄτμητον τῇ  $AG$  τετμημένη ὁμοίως τεμεῖν.

Κεῖσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχούσαν περιέχειν, καὶ  
ἐπεζεύχθω ἡ  $GB$ , καὶ διὰ τῶν  $\Delta$   $E$  τῇ  $B\Gamma$  παράλ-  
ληλοι ἤχθωσαν αἱ  $\Delta Z$   $EH$ , διὰ δὲ τοῦ  $\Delta$  τῇ  $AB$   
παράλληλος ἤχθω ἡ  $\Delta\Theta K$ .

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν  $Z\Theta$   
 $\Theta B$ . ἴση ἄρα ἡ μὲν  $\Delta\Theta$  τῇ  $ZH$ , ἡ δὲ  $\Theta K$  τῇ  $HB$ .  
Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  $\Delta K\Gamma$  παρὰ μίαν τῶν πλευ-  
ρῶν τὴν  $K\Gamma$  εὐθεῖα ἤκται ἡ  $\Theta E$ · ἀνάλογον ἄρα  
ἐστὶν ὡς ἡ  $\Gamma E$  πρὸς τὴν  $E\Delta$ , οὕτως ἡ  $K\Theta$  πρὸς τὴν  
 $\Theta\Delta$ . Ἴση δὲ ἡ μὲν  $K\Theta$  τῇ  $BH$ , ἡ δὲ  $\Theta\Delta$  τῇ  $HZ$ .  
ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $\Gamma E$  πρὸς τὴν  $E\Delta$ , οὕτως ἡ  $BH$  πρὸς  
τὴν  $HZ$ . Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  $AHE$  παρὰ  
μίαν τῶν πλευρῶν τὴν  $EH$  ἤκται ἡ  $Z\Delta$ · ἀνάλογον  
ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $E\Delta$  πρὸς τὴν  $\Delta A$ , οὕτως ἡ  $HZ$  πρὸς  
τὴν  $ZA$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ  $\Gamma E$  πρὸς τὴν  $E\Delta$ ,  
οὕτως ἡ  $BH$  πρὸς τὴν  $HZ$ . ἐστὶν ἄρα ὡς μὲν ἡ  
 $\Gamma E$  πρὸς τὴν  $E\Delta$ , οὕτως ἡ  $BH$  πρὸς τὴν  $HZ$ , ὡς  
δὲ ἡ  $E\Delta$  πρὸς τὴν  $\Delta A$ , οὕτως ἡ  $HZ$  πρὸς τὴν  $ZA$ .

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ  $AB$  τῇ δο-  
θείσῃ εὐθείᾳ τετμημένη τῇ  $AG$  ὁμοίως τέτμηται·  
ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

## Πρότασις ια.

Δύο δοθεῖσων εὐθειῶν τρίτην ἀνάλο- 11.  
γον προσευρεῖν.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ  $AB$   $AG$ . Fig. 11.  
δεῖ δὴ τῶν  $AB$   $AG$  τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχούσαν αἱ  $AB$   $AG$  καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ  $\Delta$   $E$  σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ  $AG$  ἴση ἡ  $B\Delta$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $B\Gamma$ , καὶ διὰ τοῦ  $A$  παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ  $\Delta E$ .

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ  $\Delta\Delta E$  παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν  $\Delta E$  ἤκται ἡ  $B\Gamma$ , ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $B\Delta$ , οὕτως ἡ  $AG$  πρὸς τὴν  $\Gamma E$ . Ἰση δὲ ἡ  $B\Delta$  τῇ  $AG$ , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $AG$ , οὕτως ἡ  $AG$  πρὸς τὴν  $\Gamma E$ .

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν  $AB$   $AG$ , τρίτη ἀνάλογον προσεύρηται ἡ  $\Gamma E$ . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### Πρότασις β.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τετάρτην 12. ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ  $A$   $B$   $\Gamma$ . Fig. 12. δεῖ δὴ τῶν  $A$   $B$   $\Gamma$  εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ  $\Delta E$   $\Delta Z$ , γωνίαν περιέχουσαι τυχούσαν τὴν ὑπὸ  $E\Delta Z$ , καὶ κείσθω τῇ μὲν  $A$  ἴση ἡ  $\Delta H$ , τῇ δὲ  $B$  ἴση ἡ  $H E$ , καὶ ἔτι τῇ  $\Gamma$  ἴση ἡ  $\Delta \Theta$ , καὶ ἐπεζευχθείσης τῆς  $H\Theta$ , παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ  $E$  ἡ  $E Z$ .

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ  $\Delta E Z$  παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν  $E Z$  ἤκται ἡ  $H\Theta$ , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $\Delta H$  πρὸς τὴν  $H E$ , οὕτως ἡ  $\Delta \Theta$  πρὸς τὴν  $\Theta Z$ . Ἰση δὲ ἡ μὲν  $\Delta H$  τῇ  $A$ , ἡ δὲ  $H E$  τῇ  $B$ , ἡ δὲ  $\Delta \Theta$  τῇ  $\Gamma$ , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$ , οὕτως ἡ  $\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Theta Z$ .

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν  $A$   $B$   $\Gamma$  τετάρτη ἀνάλογον προσεύρηται ἡ  $\Theta Z$ . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

## Πρότασις γ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσῃν ἀνάλογον προσευρεῖν. 13.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ  $AB$   $BΓ$ . Fig. 13  
δεῖ δὴ τῶν  $AB$   $BΓ$  μέσῃν ἀνάλογον προσευρεῖν.

Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς  $ΑΓ$  ἡμικύκλιον τὸ  $ΑΔΓ$ , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ  $B$  σημείου τῇ  $ΑΓ$  εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ  $ΒΔ$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $ΑΔ$   $ΔΓ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΑΔΓ$  ὀρθή ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ  $ΑΔΓ$  ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἤκται ἡ  $ΔΒ$ . ἡ  $ΔΒ$  ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν  $ΑΒ$   $BΓ$  μέσῃ ἀνάλογόν ἐστίν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν  $ΑΒ$   $BΓ$ , μέσῃ ἀνάλογον προσεύρηται ἡ  $ΒΔ$ . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

## Πρότασις δ.

Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. 14.

Ἐστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα Fig. 14.  
τὰ  $ΑΒ$   $BΓ$ , ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ  $B$  γωνίας, λέγω ὅτι τῶν  $ΑΒ$   $BΓ$  ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τούτ' ἐστὶν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ  $ΔΒ$  πρὸς τὴν  $ΒΕ$ , οὕτως ἡ  $ΗΒ$  πρὸς τὴν  $ΒΖ$ .

Κείσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας αἱ  $ΔΒ$   $ΒΕ$ , ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ  $ΖΒ$   $ΒΗ$ . καὶ συμπληρώσθω τὸ  $ΖΕ$  παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ  $ΑΒ$  παραλληλόγραμμον τῷ  $BΓ$  παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ  $ΖΕ$ . ἐστὶν

ἄρα ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $ZE$ , οὕτως τὸ  $BΓ$  πρὸς τὸ  $ZE$ . Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $ZE$ , οὕτως ἡ  $ΔB$  πρὸς τὴν  $BE$ , ὡς δὲ τὸ  $BΓ$  πρὸς τὸ  $ZE$ , οὕτως ἡ  $HΒ$  πρὸς τὴν  $BZ$ . καὶ ὡς ἄρα ἡ  $ΔB$  πρὸς τὴν  $BE$ , οὕτως ἡ  $HΒ$  πρὸς τὴν  $BZ$ . Τῶν  $AB$   $BΓ$  ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονητέωσαν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ἔστω ὡς ἡ  $ΔB$  πρὸς τὴν  $BE$ , οὕτως ἡ  $HΒ$  πρὸς τὴν  $BZ$ . λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $AB$  παραλληλόγραμμον τῷ  $BΓ$  παραλληλόγραμμῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ  $ΔB$  πρὸς τὴν  $BE$ , οὕτως ἡ  $HΒ$  πρὸς τὴν  $BZ$ , ἀλλ' ὡς μὲν ἡ  $ΔB$  πρὸς τὴν  $BE$ , οὕτως τὸ  $AB$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ZE$  παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ  $HΒ$  πρὸς τὴν  $BZ$ , οὕτως τὸ  $BΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ZE$  παραλληλόγραμμον. καὶ ὡς ἄρα τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $ZE$ , οὕτως τὸ  $BΓ$  πρὸς τὸ  $ZE$ . ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB$  παραλληλόγραμμον τῷ  $BΓ$  παραλληλόγραμμῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις κ.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἔχόντων 15.  
γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευ-  
ραι αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὡν μίαν  
μιᾷ ἴσην ἔχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπε-  
πόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γω-  
νίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα τὰ  $ABΓ$   $ΔΔΕ$  μίαν μιᾷ Fig. 15.  
ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ  $BAΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΔΕ$ .  
λέγω ὅτι τῶν  $ABΓ$   $ΔΔΕ$  τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν  
αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τοῦτ' ἐστὶν ὅτι  
ἐστὶν ὡς ἡ  $ΓΑ$  πρὸς τὴν  $ΔΔ$ , οὕτως ἡ  $ΕΔ$  πρὸς τὴν  $AB$ .

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν  $\Gamma A$  τῇ  $A\Delta$ . ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ  $E A$  τῇ  $AB$ . καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $B\Delta$ .

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $A\Delta E$  τριγώνῳ, ἄλλο δέ τι τὸ  $AB\Delta$ . ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ  $\Gamma AB$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $B\Delta\Delta$  τρίγωνον, οὕτως τὸ  $A\Delta E$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $B\Delta\Delta$  τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ  $\Gamma AB$  πρὸς τὸ  $B\Delta\Delta$ , οὕτως ἡ  $\Gamma A$  πρὸς τὴν  $A\Delta$ , ὡς δὲ τὸ  $E\Delta\Delta$  πρὸς τὸ  $B\Delta\Delta$ , οὕτως ἡ  $E A$  πρὸς τὴν  $AB$ . καὶ ὡς ἄρα ἡ  $\Gamma A$  πρὸς τὴν  $A\Delta$ , οὕτως ἡ  $E A$  πρὸς τὴν  $AB$ . τῶν  $AB\Gamma$   $A\Delta E$  ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν  $AB\Gamma$   $A\Delta E$  τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ  $\Gamma A$  πρὸς τὴν  $A\Delta$ , οὕτως ἡ  $E A$  πρὸς τὴν  $AB$ . λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $A\Delta E$  τριγώνῳ.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς  $B\Delta$ , ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ  $\Gamma A$  πρὸς τὴν  $A\Delta$ , οὕτως ἡ  $E A$  πρὸς τὴν  $AB$ , ἀλλ' ὡς μὲν ἡ  $\Gamma A$  πρὸς τὴν  $A\Delta$ , οὕτως τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $B\Delta\Delta$  τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ  $E A$  πρὸς τὴν  $AB$ , οὕτως τὸ  $E\Delta\Delta$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $B\Delta\Delta$  τρίγωνον. ὡς ἄρα τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $B\Delta\Delta$ , οὕτως τὸ  $E\Delta\Delta$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $B\Delta\Delta$ . ἐκάτερον ἄρα τῶν  $AB\Gamma$   $A\Delta E$  πρὸς τὸ  $B\Delta\Delta$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $E\Delta\Delta$  τριγώνῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντων . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις κ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσι, 16.  
τὰ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον  
ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ  
ὀρθογώνῳ· καὶ ἐὰν τὰ ὑπὸ τῶν ἄκρων πε-

ριεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστῶσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ  $AB$  Fig. 16.  $ΓΔ$   $E$   $Z$ , ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $ΓΔ$ , οὕτως ἡ  $E$  πρὸς τὴν  $Z$ . λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$   $Z$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $ΓΔ$   $E$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἦχθῶσαν γὰρ ἀπὸ τῶν  $A$   $Γ$  σημείων ταῖς  $AB$   $ΓΔ$  εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ  $AH$   $ΓΘ$ , καὶ κείσθω τῇ μὲν  $Z$  ἴση ἡ  $AH$ , τῇ δὲ  $E$  ἴση ἡ  $ΓΘ$ . καὶ συμπληρώσθωσαν τὰ  $BH$   $ΔΘ$  παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $ΓΔ$ , οὕτως ἡ  $E$  πρὸς τὴν  $Z$ , ἴση δὲ ἡ μὲν  $E$  τῇ  $ΓΘ$ , ἡ δὲ  $Z$  τῇ  $AH$ . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $ΓΔ$ , οὕτως ἡ  $ΓΘ$  πρὸς τὴν  $AH$ . τῶν  $BH$   $ΔΘ$  ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὡν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $BH$  παραλληλόγραμμον τῷ  $ΔΘ$  παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν  $BH$  τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$   $Z$ , ἴση γὰρ ἡ  $AH$  τῇ  $Z$ . τὸ δὲ  $ΔΘ$  τὸ ὑπὸ τῶν  $ΓΔ$   $E$ , ἴση γὰρ ἡ  $ΓΘ$  τῇ  $E$ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $AB$   $Z$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $ΓΔ$   $E$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$   $Z$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν  $ΓΔ$   $E$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $ΓΔ$ , οὕτως ἡ  $E$  πρὸς τὴν  $Z$ .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$   $Z$  ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $ΓΔ$   $E$ , καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν  $AB$   $Z$  τὸ  $BH$ , ἴση γὰρ ἡ  $AH$  τῇ  $Z$ , τὸ δὲ ὑπὸ τῶν  $ΓΔ$   $E$  τὸ  $ΔΘ$ , ἴση γὰρ ἡ  $ΓΘ$  τῇ  $E$ . τὸ ἄρα  $BH$  ἴσον ἐστὶ τῷ  $ΔΘ$ . καὶ εἰσιν ἰσο-



γώνια. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογώνιων παραλληλογράμ-  
μων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας  
γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $ΓΔ$ , οὕτως ἡ  
 $ΓΘ$  πρὸς τὴν  $ΑΗ$ . ἴση δὲ ἡ μὲν  $ΓΘ$  τῇ  $E$ , ἡ δὲ  
 $ΑΗ$  τῇ  $Z$ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $ΓΔ$ , οὕ-  
τως ἡ  $E$  πρὸς τὴν  $Z$ .

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον . . . καὶ τὰ  
ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ιζ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσι, τὸ 17.  
ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον  
ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· καὶ  
ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθο-  
γώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετρα-  
γώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσαντα.

Ἐστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ  $A B Γ$ , Fig. 17.  
ὡς ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$ , οὕτως ἡ  $B$  πρὸς τὴν  $Γ$ · λέγω  
ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν  $A Γ$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον  
ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $B$  τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ  $B$  ἴση ἡ  $Δ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$ , οὕτως ἡ  
 $B$  πρὸς τὴν  $Γ$ , ἴση δὲ ἡ  $B$  τῇ  $Δ$ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  
 $A$  πρὸς τὴν  $B$ , οὕτως ἡ  $Δ$  πρὸς τὴν  $Γ$ . Ἐὰν δὲ  
τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων  
περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέ-  
σων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $A Γ$   
ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $B Δ$ . Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν  $B$   
 $Δ$  τὸ ἀπὸ τῆς  $B$  ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ  $B$  τῇ  $Δ$ · τὸ ἄρα  
ὑπὸ τῶν  $A Γ$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ ●  
τῷ ἀπὸ τῆς  $B$  τετραγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν  $A Γ$  ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ  
τῆς  $B$ · λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$ , οὕτως  
ἡ  $B$  πρὸς τὴν  $Γ$ .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $A \Gamma$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $B$ , ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς  $B$  τὸ ὑπὸ τῶν  $B \Delta$  ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ  $B$  τῇ  $\Delta$ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $A \Gamma$  ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $B \Delta$ . Ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσαν ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$ , οὕτως ἡ  $\Delta$  πρὸς τὴν  $\Gamma$ . Ἰση δὲ ἡ  $B$  τῇ  $\Delta$ . ὡς ἄρα ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$ , αὐτως ἡ  $B$  πρὸς τὴν  $\Gamma$ .

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ιη.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι 18. εὐθυγράμμῳ ὁμοιὸν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἐὼτω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ , τὸ δὲ δο- Fig. 18. θέν εὐθύγραμμον τὸ  $\Gamma E$ . δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς  $AB$  εὐθείας τῷ  $\Gamma E$  εὐθυγράμμῳ ὁμοιὸν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἐπεξεύχθω ἡ  $\Delta Z$ , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ  $AB$  εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς  $A B$  τῇ μὲν πρὸς τῷ  $\Gamma$  γωνία ἴση ἡ ὑπὸ  $HAB$ , τῇ δὲ ὑπὸ  $\Gamma \Delta Z$  ἴση ἡ ὑπὸ  $ABH$ . λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Gamma Z \Delta$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $AHB$  ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $Z \Gamma \Delta$  τρίγωνον τῷ  $HAB$  τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $Z \Delta$  πρὸς τὴν  $HB$ , οὕτως ἡ  $Z \Gamma$  πρὸς τὴν  $HA$ , καὶ ἡ  $\Gamma \Delta$  πρὸς τὴν  $AB$ . Πάλιν συνεστάτω πρὸς τῇ  $BH$  εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς  $B H$  τῇ μὲν ὑπὸ  $\Delta Z E$  γωνία ἴση ἡ ὑπὸ  $BH \Theta$ , τῇ δὲ ὑπὸ  $Z \Delta E$  ἴση ἡ ὑπὸ  $HB \Theta$ . λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ  $E$  λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ  $\Theta$  ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $Z \Delta E$  τρίγωνον τῷ  $HB \Theta$  τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $\Delta Z$  πρὸς τὴν  $HB$ , οὕτως ἡ  $Z E$  πρὸς

τὴν  $H\Theta$ , καὶ ἡ  $ΕΔ$  πρὸς τὴν  $\Theta B$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ  $ZΔ$  πρὸς τὴν  $HB$ , οὕτως ἡ  $ZΓ$  πρὸς τὴν  $HA$ , καὶ ἡ  $ΓΔ$  πρὸς τὴν  $AB$ . καὶ ὡς ἄρα ἡ  $ZΓ$  πρὸς τὴν  $AH$ , οὕτως ἡ τε  $ΓΔ$  πρὸς τὴν  $AB$  καὶ ἡ  $ZE$  πρὸς τὴν  $H\Theta$ , καὶ ἔτι ἡ  $ΕΔ$  πρὸς τὴν  $\Theta B$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ  $ΓΖΔ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $AHB$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $ΔZE$  τῇ ὑπὸ  $BH\Theta$ . ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΓZE$  ὅλη τῇ ὑπὸ  $AH\Theta$  ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΓΔΕ$  τῇ ὑπὸ  $AB\Theta$  ἐστὶν ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ  $Γ$  τῇ πρὸς τῷ  $A$  ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ  $E$  τῇ πρὸς τῷ  $\Theta$ . ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $A\Theta$  τῷ  $ΓΕ$ , καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $A\Theta$  εὐθύγραμμον τῷ  $ΓΕ$  εὐθύγραμμῳ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς  $AB$  τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ τῷ  $ΓΕ$  ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράφεται τὸ  $A\Theta$ . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### Πρότασις ιθ'.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 19.

Ἐστω ὅμοια τρίγωνα τὰ  $ABΓ$   $ΔΕΖ$  ἴσην Fig. 19. ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ  $B$  γωνίαν τῇ πρὸς τῷ  $E$ , ὡς δὲ τὴν  $AB$  πρὸς τὴν  $BΓ$ , οὕτως τὴν  $ΔΕ$  πρὸς τὴν  $EZ$ , ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν  $BΓ$  τῇ  $EZ$ . λέγω ὅτι τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΔΕΖ$  τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $EZ$ .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν  $BΓ$   $EZ$  τρίτη ἀνάλογον ἡ  $BH$ , ὥστε εἶναι ὡς τὴν  $BΓ$  πρὸς τὴν  $EZ$ , οὕτως τὴν  $EZ$  πρὸς τὴν  $BH$ . καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $HA$ .

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $BΓ$ , οὕτως ἡ  $ΔΕ$  πρὸς τὴν  $EZ$ . ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $ΔΕ$ , οὕτως ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $EZ$ . Ἀλλ' ὡς

ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $EZ$ , οὕτως ἐστὶν ἡ  $EZ$  πρὸς τὴν  $BH$ . καὶ ὥς ἄρα ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $ΔE$ , οὕτως ἡ  $EZ$  πρὸς τὴν  $BH$ . τῶν  $ABH$   $ΔEZ$  ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὦν δὲ, μίαν μιᾷ ἴσην ἔχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABH$  τρίγωνον τῷ  $ΔEZ$  τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $EZ$ , οὕτως ἡ  $EZ$  πρὸς τὴν  $BH$ , ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἥπερ πρὸς τὴν δευτέραν. ἡ  $BΓ$  ἄρα πρὸς τὴν  $BH$  διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $EZ$ . Ὡς δὲ ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $BH$ , οὕτως τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ABH$  τρίγωνον. καὶ τὸ  $ABΓ$  ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ  $ABH$  διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $EZ$ . ἴσον δὲ τὸ  $ABH$  τρίγωνον τῷ  $ΔEZ$  τριγώνῳ. καὶ τὸ  $ABΓ$  ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΔEZ$  τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $EZ$ .

Τὰ ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, ἔστιν ὥς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. (Ἐπειδήπερ ἐδείχθη, ὥς ἡ  $ΓB$  πρὸς τὴν  $BH$ , οὕτως τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ABH$  τρίγωνον, τοῦτ' ἐστὶ τὸ  $ΔEZ$ .)

### Πρότασις κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς

τὸ παλύνγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ  
ἢ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον  
πλευράν.

Ἐστω ὅμοια παλύνγωνα τὰ  $ΑΒΓΔΕ ΖΗΘΚΛ$ , Fig. 20.  
ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ  $ΑΒ$  τῇ  $ΖΗ$ . λέγω ὅτι τὰ  $ΑΒΓΔΕ$   
 $ΖΗΘΚΛ$  παλύνγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται  
καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ  
τὰ  $ΑΒΓΔΕ$  παλύνγωνον πρὸς τὰ  $ΖΗΘΚΛ$  παλύνγωνον  
διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἡ  $ΑΒ$  πρὸς τὴν  $ΖΗ$ .

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ  $ΒΕ ΕΓ ΗΔ ΑΘ$ .

Καὶ ἐπεὶ ὁμοιὸν ἐστὶ τὸ  $ΑΒΓΔΕ$  παλύνγωνον  
τῷ  $ΖΗΘΚΛ$  παλύνγῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΒΑΕ$  γω-  
νία τῇ ὑπὸ  $ΗΖΔ$ . καὶ ἐστὶν ὡς ἡ  $ΒΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΕ$ ,  
οὕτως ἡ  $ΖΗ$  πρὸς τὴν  $ΖΔ$ . Ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά  
ἐστὶ τὰ  $ΑΒΕ ΖΗΔ$  μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην  
ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλο-  
γον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΑΒΕ$  τρίγωνον τῷ  $ΖΗΔ$   
τριγῳ, ὥστε καὶ ὁμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΑΒΕ$   
γωνία τῇ ὑπὸ  $ΖΗΔ$ , ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ  $ΑΒΓ$   
ἄλη τῇ ὑπὸ  $ΖΗΘ$  ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυ-  
γώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΕΒΓ$  γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ  
 $ΔΗΘ$  ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν  
 $ΑΒΕ ΖΗΔ$  τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ  $ΕΒ$  πρὸς τὴν  $ΒΑ$ ,  
οὕτως ἡ  $ΔΗ$  πρὸς τὴν  $ΗΖ$ , ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν  
ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἐστὶν ὡς ἡ  $ΑΒ$  πρὸς τὴν  $ΒΓ$ ,  
οὕτως ἡ  $ΖΗ$  πρὸς τὴν  $ΗΘ$ . διῶσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  
 $ΕΒ$  πρὸς τὴν  $ΒΓ$ , οὕτως ἡ  $ΔΗ$  πρὸς τὴν  $ΗΘ$ , καὶ  
περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ  $ΕΒΓ ΔΗΘ$  αἱ πλευ-  
ραι ἀνάλογόν εἰσιν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΕΒΓ$  τρί-  
γωνον τῷ  $ΔΗΘ$  τριγῳ, ὥστε καὶ ὁμοιον ἐστὶ τὸ  
 $ΕΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΗΘ$  τριγῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ  
καὶ τὸ  $ΕΓΔ$  τρίγωνον ὁμοιὸν ἐστὶ τῷ  $ΑΘΚ$  τριγῳ·  
τὰ ἄρα ὅμοια παλύνγωνα τὰ  $ΑΒΓΔΕ ΖΗΘΚΛ$  εἰς  
τε ὅμοια τρίγωνα διήρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Αέγω ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τοῦτ' ἔστιν, ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ  $ABE$   $EBΓ$   $EΓΔ$ , ἐπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ  $ZΗΔ$   $ΛΗΘ$   $ΛΘΚ$ , καὶ ὅτι τὸ  $ABΓΔΕ$  πολύγωνον πρὸς τὸ  $ZΗΘΚΔ$  πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τοῦτ' ἔστιν ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $ZΗ$ .

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ  $ΑΓ$   $ZΘ$ .

Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ABΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ZΗΘ$ , καὶ ἐστὶν ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $ΒΓ$ , οὕτως ἡ  $ZΗ$  πρὸς τὴν  $ΗΘ$ . ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ZΗΘ$  τριγώνῳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ  $BAΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $HZΘ$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $BΓΑ$  τῇ ὑπὸ  $ΗΘΖ$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $BAM$  γωνία τῇ ὑπὸ  $HZN$ , ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ABM$  τῇ ὑπὸ  $ZHN$  ἴση. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $AMB$  λοιπὴ τῇ ὑπὸ  $ZNH$  ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABM$  τρίγωνον τῷ  $ZHN$  τριγώνῳ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ  $BMΓ$  τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ  $HNΘ$  τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς μὲν ἡ  $AM$  πρὸς τὴν  $MB$ , οὕτως ἡ  $ZN$  πρὸς τὴν  $NH$ , ὡς δὲ ἡ  $BM$  πρὸς τὴν  $ΜΓ$ , οὕτως ἡ  $HN$  πρὸς τὴν  $NΘ$ . ὥστε καὶ διῖσθαι, ὡς ἡ  $AM$  πρὸς τὴν  $ΜΓ$  οὕτως ἡ  $ZN$  πρὸς τὴν  $NΘ$ . Ἀλλ' ὡς ἡ  $AM$  πρὸς τὴν  $ΜΓ$ , οὕτως τὸ  $ABM$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $MBΓ$ , καὶ τὸ  $AME$  πρὸς τὸ  $EMΓ$ , πρὸς ἄλληλα γὰρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπόμενων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα. ὡς ἄρα τὸ  $AMB$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $BMΓ$ , οὕτως τὸ  $ABE$  πρὸς τὸ  $ΓBE$ . Ἀλλ' ὡς τὸ  $AMB$  πρὸς τὸ  $BMΓ$ , οὕτως ἡ  $AM$  πρὸς τὴν  $ΜΓ$ . καὶ ὡς ἄρα ἡ  $AM$  πρὸς τὴν  $ΜΓ$ , οὕτως τὸ  $ABE$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $EBΓ$  τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ  $ZN$  πρὸς τὴν  $NΘ$ , οὕτως τὸ  $ZΗΔ$  τρίγωνον

πρὸς τὸ  $ΗΛΘ$  τρίγωνον. Καί ἐστιν ὡς ἡ  $ΑΜ$  πρὸς τὴν  $ΜΓ$ , οὕτως ἡ  $ΖΝ$  πρὸς τὴν  $ΝΘ$ . καὶ ὡς ἄρα τὸ  $ΑΒΕ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΒΕΓ$  τρίγωνον, οὕτως τὸ  $ΖΗΑ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΗΘΑ$  τρίγωνον, καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ  $ΑΒΕ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΖΗΑ$  τρίγωνον, οὕτως τὸ  $ΒΕΓ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΗΛΘ$  τρίγωνον. Ὅμοίως δὴ δείξομεν, ἐπιζευχθεῖσων τῶν  $ΒΔ$   $ΗΚ$ , ὅτι καὶ ὡς τὸ  $ΒΕΓ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΗΛΘ$  τρίγωνον, οὕτως τὸ  $ΕΓΔ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΑΘΚ$  τρίγωνον. Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ  $ΑΒΕ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΖΗΑ$  τρίγωνον, οὕτως τὸ  $ΕΒΓ$  πρὸς τὸ  $ΛΗΘ$ , καὶ ἔτι τὸ  $ΕΓΔ$  πρὸς τὸ  $ΑΘΚ$ . καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα. ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ  $ΑΒΕ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΖΗΑ$  τρίγωνον, οὕτως τὸ  $ΑΒΓΔΕ$  πολύγωνον πρὸς τὸ  $ΖΗΘΚΑ$  πολύγωνον. Ἀλλὰ τὸ  $ΑΒΕ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΖΗΑ$  τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ  $ΑΒ$  ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν  $ΖΗ$  ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ τὸ  $ΑΒΓΔΕ$  ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ  $ΖΗΘΚΑ$  πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ  $ΑΒ$  ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν  $ΖΗ$  ὁμόλογον πλευράν.

Τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἰς τε . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

#### Πόρισμα α.

Ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων ὥστε καὶ καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

## Πόρισμα β.

Καί ἐὰν τῶν  $AB$   $ZH$  τρίτην ἀνάλογον λάβω-  
μεν τὴν  $\Xi$ , ἢ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Xi$  διπλασίονα λόγον  
ἔχει, ἥπερ ἢ  $AB$  πρὸς τὴν  $ZH$ . Ἐχει δὲ καὶ τὸ  
πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ τὸ τετράπλευρον  
πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον, ἥπερ ἢ ὁμό-  
λογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τοῦτ' ἐστὶν  
ἢ  $AB$  πρὸς τὴν  $ZH$ . ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν  
τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς  
εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν  
τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ  
τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

## Πρότασις κα.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθύγραμμῳ ὅμοια καὶ ἀλ- 21.  
λήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Ἐστω γὰρ ἐκάτερον τῶν  $A$   $B$  εὐθύγραμμων Fig. 21.  
τῷ  $\Gamma$  ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ τὸ  $A$  τῷ  $B$  ἐστὶν ὅμοιον.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοιόν ἐστι τὸ  $A$  τῷ  $\Gamma$ · ἰσογώνιον  
τέ ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευ-  
ρὰς ἀνάλογον ἔχει. Πάλιν, ἐπεὶ ὁμοιόν ἐστι τὸ  $B$   
τῷ  $\Gamma$ · ἰσογώνιον τέ ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς  
ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. Ἐκάτερον ἄρα  
τῶν  $A$   $B$  τῷ  $\Gamma$  ἰσογώνιον τέ ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς  
ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, ὥστε καὶ τὸ  $A$   
τῷ  $B$  ἰσογώνιον τέ ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γω-  
νίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $A$   
τῷ  $B$ .

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ εὐθύγραμμῳ . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ  
προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις κβ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσι, 22.  
καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ



ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· καὶ  
ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὁμοιά τε καὶ  
ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾗ, καὶ  
αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστώσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ  $AB$  Fig. 22.  
 $\Gamma\Delta$   $EZ$   $H\Theta$ , ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$ , οὕτως ἡ  $EZ$   
πρὸς τὴν  $H\Theta$ , καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν  
 $AB$   $\Gamma\Delta$  ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα  
τὰ  $KAB$   $\Lambda\Gamma\Delta$ , ἀπὸ δὲ τῶν  $EZ$   $H\Theta$  ὁμοιά τε καὶ  
ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ  $MZ$   $N\Theta$ . λέγω ὅτι  
ἔστιν ὡς τὸ  $KAB$  πρὸς τὸ  $\Lambda\Gamma\Delta$ , οὕτως τὸ  $MZ$  πρὸς  
τὸ  $N\Theta$ .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν  $AB$   $\Gamma\Delta$  τρίτη ἀνάλογον  
ἡ  $\Xi$ , τῶν δὲ  $EZ$   $H\Theta$  τρίτη ἀνάλογον ἡ  $O$ . Καὶ  
ἐπεὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$ , οὕτως ἡ  $EZ$   
πρὸς τὴν  $H\Theta$ , ὡς δὲ ἡ  $\Gamma\Delta$  πρὸς τὴν  $\Xi$ , οὕτως ἡ  $H\Theta$   
πρὸς τὴν  $O$ . διῷσου ἄρα ἔστιν ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  
 $\Xi$ , οὕτως ἡ  $EZ$  πρὸς τὴν  $O$ . Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ  $AB$   
πρὸς τὴν  $\Xi$ , οὕτως τὸ  $KAB$  πρὸς τὸ  $\Lambda\Gamma\Delta$ , ὡς δὲ ἡ  
 $EZ$  πρὸς τὴν  $O$ , οὕτως τὸ  $MZ$  πρὸς τὸ  $N\Theta$ . καὶ  
ὡς ἄρα τὸ  $KAB$  πρὸς τὸ  $\Lambda\Gamma\Delta$ , οὕτως τὸ  $MZ$  πρὸς  
τὸ  $N\Theta$ .

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ  $KAB$  πρὸς τὸ  $\Lambda\Gamma\Delta$ , οὕ-  
τως τὸ  $MZ$  πρὸς τὸ  $N\Theta$ . λέγω ὅτι ἔστι καὶ ὡς ἡ  
 $AB$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$ , οὕτως ἡ  $EZ$  πρὸς τὴν  $H\Theta$ .

Γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$ , οὕτως  
ἡ  $EZ$  πρὸς τὴν  $\Pi P$ , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς  
 $\Pi P$  ὁποτέρῳ τῶν  $MZ$   $N\Theta$  ὁμοίων τε καὶ ὁμοίως  
κείμενον εὐθύγραμμον τὸ  $\Sigma P$ .

Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$ , οὕτως  
ἡ  $EZ$  πρὸς τὴν  $\Pi P$ , καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν  
τῶν  $AB$   $\Gamma\Delta$  ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ  $KAB$   
 $\Lambda\Gamma\Delta$ , ἀπὸ δὲ τῶν  $EZ$   $\Pi P$  ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κεί-  
μενα τὰ  $MZ$   $\Sigma P$ . ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $KAB$  πρὸς τὸ  
 $\Lambda\Gamma\Delta$

ΑΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΑΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΝΘ ΣΡ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ. Ἔστι δὲ αὐτῷ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΠΡ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ η μ ρ α.

(Ὅτι δὲ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴση ἢ καὶ ὁμοία, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευраὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἴσιν, δείξομεν οὕτως.

Ἐστω ἴσα καὶ ὁμοία εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΠΡ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

Εἰ γὰρ ἀνισοὶ εἴσιν· μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΠΡ πρὸς τὴν ΘΗ, οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ. Μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μείζον ἐστὶ τοῦ ΘΝ· ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἀνισοὶ ἐστὶν ἡ ΠΡ τῆς ΗΘ, ἴση ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.)

Πρότασις κγ'.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς 23.  
ἀλλήλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἐστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ  $ΑΓ ΓΖ$ , Fig. 23. ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ  $ΒΓΔ$  γωνίαν τῇ ὑπὸ  $ΕΓΗ$  λέγω ὅτι τὸ  $ΑΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΖ$  παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν σύγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τοῦ τε, ὃν ἔχει ἡ  $ΒΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΗ$  καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ  $ΔΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΕ$ .

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν  $ΒΓ$  τῇ  $ΓΗ$ . ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ  $ΔΓ$  τῇ  $ΓΕ$ . καὶ συμπληρώσθω τὸ  $ΔΗ$  παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκείσθω τις εὐθεῖα ἡ  $Κ$ , καὶ γεγονέτω ὥς μὲν ἡ  $ΒΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΗ$ , οὕτως ἡ  $Κ$  πρὸς τὴν  $Α$ , ὥς δὲ ἡ  $ΔΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΕ$ , οὕτως ἡ  $Α$  πρὸς τὴν  $Μ$ .

Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε  $Κ$  πρὸς τὴν  $Α$  καὶ τῆς  $Α$  πρὸς τὴν  $Μ$  οἱ αὐτοὶ εἰσὶ τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε  $ΒΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΗ$  καὶ τῆς  $ΔΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΕ$ . Ἀλλ' ὁ τῆς  $Κ$  πρὸς τὴν  $Μ$  λόγος σύγκειται ἐκ τε τοῦ τῆς  $Κ$  πρὸς τὴν  $Α$  λόγου καὶ τοῦ τῆς  $Α$  πρὸς τὴν  $Μ$ . ὥστε καὶ ἡ  $Κ$  πρὸς τὴν  $Μ$  λόγον ἔχει τὸν σύγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἡ  $ΒΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΗ$ , οὕτως τὸ  $ΑΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΘ$ . ἀλλ' ὥς ἡ  $ΒΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΗ$ , οὕτως ἡ  $Κ$  πρὸς τὴν  $Α$ . καὶ ὥς ἄρα ἡ  $Κ$  πρὸς τὴν  $Α$ , οὕτως τὸ  $ΑΓ$  πρὸς τὸ  $ΓΘ$ . Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἡ  $ΔΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΕ$ , οὕτως τὸ  $ΓΘ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΖ$ . ἀλλ' ὥς ἡ  $ΔΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΕ$ , οὕτως ἡ  $Α$  πρὸς τὴν  $Μ$ . καὶ ὥς ἄρα ἡ  $Α$  πρὸς τὴν  $Μ$ , οὕτως τὸ  $ΓΘ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΖ$  παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὥς μὲν ἡ  $Κ$  πρὸς τὴν  $Α$ , οὕτως τὸ  $ΑΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΘ$  παραλληλόγραμμον, ὥς δὲ ἡ  $Α$  πρὸς τὴν  $Μ$ , οὕτως τὸ  $ΓΘ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΖ$  παραλληλόγραμμον. διῶσου ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ  $Κ$  πρὸς τὴν  $Μ$ , οὕτως τὸ  $ΑΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΖ$  παραλληλόγραμμον. Ἡ δὲ  $Κ$  πρὸς τὴν  $Μ$  λόγον ἔχει τὸν

συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ  $ΑΓ$  ἄρα πρὸς τὸ  $ΓΖ$  λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμμα . . . καὶ τὰ ἴσης ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κδ.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν 24.  
διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι  
τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ  $ΑΒΓΔ$ , διάμετρος *Fig. 24.*  
δὲ αὐτοῦ ἡ  $ΑΓ$ , περὶ δὲ τὴν  $ΑΓ$  παραλληλόγραμμα  
ἔστω τὰ  $ΕΗ ΘΚ$ · λέγω ὅτι ἐκάτερον τῶν  $ΕΗ ΘΚ$   
παραλληλογράμμων ὁμοίων ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ  $ΑΒΓΔ$   
καὶ ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ  $ΑΒΓ$  παρὰ μίαν τῶν  
πλευρῶν τὴν  $ΒΓ$  ἤκται ἡ  $ΕΖ$ · ἀνάλογόν ἐστιν ὡς  
ἡ  $ΒΕ$  πρὸς τὴν  $ΕΑ$ , οὕτως ἡ  $ΓΖ$  πρὸς τὴν  $ΖΑ$ .  
Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  $ΑΓΔ$  παρὰ μίαν τῶν  
πλευρῶν τὴν  $ΓΔ$  ἤκται ἡ  $ΖΗ$ , ἀνάλογόν ἐστιν ὡς  
ἡ  $ΓΖ$  πρὸς τὴν  $ΖΑ$ , οὕτως ἡ  $ΔΗ$  πρὸς τὴν  $ΗΑ$ .  
Ἀλλ' ὡς ἡ  $ΓΖ$  πρὸς τὴν  $ΖΑ$ , οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ  
 $ΒΕ$  πρὸς τὴν  $ΕΑ$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ  $ΒΕ$  πρὸς τὴν  $ΕΑ$ ,  
οὕτως ἡ  $ΔΗ$  πρὸς τὴν  $ΗΑ$ , καὶ συντεθέντι ὡς ἡ  
 $ΒΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΕ$ , οὕτως ἡ  $ΔΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΗ$ , καὶ  
ἐναλλάξ ὡς ἡ  $ΒΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΔ$ , οὕτως ἡ  $ΕΑ$  πρὸς  
τὴν  $ΑΗ$ · τῶν ἄρα  $ΑΒΓΔ ΕΗ$  παραλληλογράμμων  
ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γω-  
νίαν τὴν ὑπὸ  $ΒΑΔ$ . Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ  
 $ΗΖ$  τῇ  $ΔΓ$ , ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ  $ΑΗΖ$  γωνία τῇ  
ὑπὸ  $ΑΔΓ$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $ΗΖΑ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΓΑ$ , καὶ κοινὴ  
τῶν δύο τριγώνων τῶν  $ΑΔΓ ΑΗΖ$  ἡ ὑπὸ  $ΑΑΓ$  γω-  
νία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΑΔΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΑΗΖ$   
τρίγωνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ  $ΑΓΒ$  τρίγω-  
νον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ  $ΑΖΕ$  τρίγωνῳ, καὶ ὅλον τὸ

$\triangle AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμον τῷ  $E\text{H}$  παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιον ἐστίν. Ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $A\Delta$  πρὸς τὴν  $\Delta\Gamma$ , οὕτως ἡ  $A\text{H}$  πρὸς τὴν  $\text{H}\text{Z}$ . ὡς δὲ ἡ  $\Delta\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Gamma A$ , οὕτως ἡ  $\text{H}\text{Z}$  πρὸς τὴν  $\text{Z}\Lambda$ . ὡς δὲ ἡ  $A\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Gamma B$ , οὕτως ἡ  $A\text{Z}$  πρὸς τὴν  $\text{Z}\text{E}$ . καὶ ἔτι ὡς ἡ  $\Gamma B$  πρὸς τὴν  $B A$ , οὕτως ἡ  $\text{Z}\text{E}$  πρὸς τὴν  $\text{E}\Lambda$ . Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ  $\Delta\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Gamma A$ , οὕτως ἡ  $\text{H}\text{Z}$  πρὸς τὴν  $\text{Z}\Lambda$ , ὡς δὲ ἡ  $A\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Gamma B$ , οὕτως ἡ  $A\text{Z}$  πρὸς τὴν  $\text{Z}\text{E}$ . διῶσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $\Delta\Gamma$  πρὸς τὴν  $B\Gamma$ , οὕτως ἡ  $\text{H}\text{Z}$  πρὸς τὴν  $\text{Z}\text{E}$ . τῶν ἄρα  $\triangle AB\Gamma\Delta$   $E\text{H}$  παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἰπερὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $\triangle AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμον τῷ  $E\text{H}$  παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ  $\triangle AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμον καὶ τῷ  $\Theta K$  παραλληλογράμμῳ ὁμοιόν ἐστίν. ἑκάτερον ἄρα τῶν  $E\text{H}$   $\Theta K$  παραλληλογράμμων τῷ  $\triangle AB\Gamma\Delta$  παραλληλογράμμῳ ὁμοιόν ἐστι. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ  $E\text{H}$  ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ  $\Theta K$  παραλληλογράμμῳ ὁμοιόν ἐστι.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τὰ περὶ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις κ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοιον καὶ 25.  
ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστή-  
σασθαι.

Ἐστω τὸ μὲν δοθέν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὁμοιον Fig. 25.  
συστήσασθαι, τὸ  $\triangle AB\Gamma$ , ᾧ δὲ ἴσον, τὸ  $\Delta$ . δεῖ δὴ τῷ  
μὲν  $\triangle AB\Gamma$  ὁμοιον, τῷ δὲ  $\Delta$  ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Παραβεβλήσθω παρὰ μὲν τὴν  $B\Gamma$  τῷ  $\triangle AB\Gamma$   
τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ  $B\text{E}$ , παρὰ δὲ  
τὴν  $\Gamma\text{E}$  τῷ  $\Delta$  ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ  $\Gamma\text{M}$  ἐν  
γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $\text{Z}\Gamma\text{E}$ , ἥ ἐστίν ἴση τῇ ὑπὸ  $\Gamma B A$ . ἐπ.

εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν  $BΓ$  τῇ  $ΓΖ$ , ἡ δὲ  $ΛΕ$  τῇ  $ΕΜ$ . Καὶ εἰλήφθω τῶν  $BΓ$   $ΓΖ$  μέση ἀνάλογον ἡ  $ΗΘ$ , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς  $ΗΘ$  τῷ  $ΑΒΓ$  ὁμοῖόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ  $ΚΗΘ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $ΗΘ$ , οὕτως ἡ  $ΗΘ$  πρὸς τὴν  $ΓΖ$ . ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὁμοῖον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΖ$ , οὕτως τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΚΗΘ$  τρίγωνον. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΖ$ , οὕτως τὸ  $ΒΕ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΕΖ$  παραλληλόγραμμον. καὶ ὡς ἄρα τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΚΗΘ$  τρίγωνον, οὕτως τὸ  $ΒΕ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΕΖ$  παραλληλόγραμμον. ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΒΕ$  παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ  $ΚΗΘ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΕΖ$  παραλληλόγραμμον. Ἰσον δὲ τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΒΕ$  παραλληλογράμῳ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ  $ΚΗΘ$  τρίγωνον τῷ  $ΕΖ$  παραλληλογράμῳ. Ἀλλὰ τὸ  $ΕΖ$  παραλληλόγραμμον τῷ  $Δ$  ἐστὶν ἴσον. καὶ τὸ  $ΚΗΘ$  ἄρα τῷ  $Δ$  ἐστὶν ἴσον. Ἔστι δὲ τὸ  $ΚΗΘ$  καὶ τῷ  $ΑΒΓ$  ὁμοῖον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ  $ΑΒΓ$  ὁμοῖον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ  $Δ$  ἴσον τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ  $ΚΗΘ$ . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### Πρότασις κς.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὁμοῖόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ. 26.

Ἀπὸ γὰρ παραλληλογράμμου τοῦ  $ΑΒΓΔ$  παρ- Fig. 26.  
αλληλόγραμμον ἀφηρήσθω τὸ  $ΑΕΖΗ$ , ὁμοῖον τῷ  $ΑΒΓΔ$  καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ

τὴν ὑπὸ  $\Delta AB$ , λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma\Delta$  τῷ  $AEZH$ .

Μὴ γάρ· ἄλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω αὐτοῦ ἡ διάμετρος ἡ  $A\Theta\Gamma$ , καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ  $HZ$  διήχθω ἐπὶ τὸ  $\Theta$ , καὶ ἤχθω διὰ τοῦ  $\Theta$  ὁποτέρᾳ τῶν  $AD$   $B\Gamma$  παράλληλος ἡ  $\Theta K$ .

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma\Delta$  τῷ  $KH$ , ὁμοίον ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma\Delta$  τῷ  $KH$ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $DA$  πρὸς τὴν  $AB$ , οὕτως ἡ  $HA$  πρὸς τὴν  $AK$ . Ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν  $AB\Gamma\Delta$   $E\eta$ , ὡς ἡ  $DA$  πρὸς τὴν  $AB$ , οὕτως ἡ  $HA$  πρὸς τὴν  $AE$ , καὶ ὡς ἄρα ἡ  $HA$  πρὸς τὴν  $AK$ , οὕτως ἡ  $HA$  πρὸς τὴν  $AE$ . ἡ  $HA$  ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν  $AK$   $AE$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ  $AE$  τῇ  $AK$ , ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οὐκ ἐστὶ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ  $AB\Gamma\Delta$  τῷ  $E\eta$ · περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ  $AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμον τῷ  $AEZH$  παραλληλογράμμῳ.

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις κζ.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν 27.  
παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ  
ἐλλειπόντων εἶδеси παραλληλογράμμοις  
ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς  
ἡμισείας ἀναγραφόμενῳ μέγιστόν ἐστι τὸ  
ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον,  
ὅμοιον ὅν τῷ ἐλλείμματι.

Ἔστω εὐθεΐα ἡ  $AB$ , καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ Fig. 27.  
τὸ  $\Gamma$ , καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν  $AB$  εὐθεΐαν τὸ  
 $AD$  παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἶδει παραλληλο-  
γράμμῳ τῷ  $\Gamma E$ , ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ

ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφέντι τῆς  $AB$ , τοῦτ' ἐστὶ τῆς  $GB$ . λέγω ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν  $AB$  παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἶδеси παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ  $ΓΕ$  μέγιστόν ἐστι τὸ  $ΑΔ$ . Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν  $AB$  εὐθεΐαν τὸ  $AZ$  παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἶδει παραλληλογράμμου τῷ  $KΘ$ , ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ  $ΓΕ$ . λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ  $ΑΔ$  τοῦ  $AZ$ .

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίόν ἐστι τὸ  $ΓΕ$  παραλληλόγραμμον τῷ  $KΘ$  παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσεδιάμετρον. Ἦχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ  $ΔΒ$ , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ  $ΓΖ$  τῷ  $ΖΕ$ , κοινὸν προσκείσθω τὸ  $KΘ$ . ὅλον ἄρα τὸ  $ΓΘ$  ὅλῳ τῷ  $ΚΕ$  ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ  $ΓΘ$  τῷ  $ΓΗ$  ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΓΒ$  ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ  $ΗΓ$  ἄρα τῷ  $ΕΚ$  ἴσον ἐστὶν. Κοινὸν προσκείσθω τὸ  $ΓΖ$ . ὅλον ἄρα τὸ  $AZ$  τῷ  $ΔΜΝ$  γνώμονί ἐστιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ  $ΓΕ$  παραλληλόγραμμον, τοῦτ' ἐστὶ τὸ  $ΑΔ$ , τοῦ  $AZ$  παραλλογογράμμου μεῖζόν ἐστιν.

Ἐστω πάλιν ἡ  $AB$  τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ  $Γ$ , καὶ παραβληθὲν τὸ  $ΑΔ$  ἐλλεῖπον εἶδει τῷ  $ΓΜ$ , καὶ παραβεβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν  $AB$  τὸ  $ΑΕ$  παραλλόγραμμον ἐλλεῖπον τῷ  $ΔΖ$ , ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς  $AB$ , τῷ  $ΓΜ$ . λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν τὸ  $ΑΔ$  τοῦ  $ΑΕ$ .

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίόν ἐστι τὸ  $ΔΖ$  τῷ  $ΓΜ$ , περὶ τὴν αὐτὴν εἰσεδιάμετρον· ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ  $ΕΒ$ , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ  $ΔΖ$  τῷ  $ΑΘ$ , ἐπεὶ καὶ ἡ  $ΖΗ$  τῇ  $ΗΘ$ . μεῖζον ἄρα τὸ  $ΔΖ$  τοῦ  $ΚΕ$ . ἴσον δὲ τὸ  $ΔΖ$  τῷ  $ΔΑ$ . μεῖζον ἄρα καὶ τὸ  $ΔΑ$  τοῦ  $ΕΚ$ .



Κοινὸν προσκείσθω τὸ  $ΚΔ$ . ὅλον ἄρα τὸ  $ΑΔ$  ὅλου τοῦ  $ΑΕ$  μείζον ἐστίν.

Πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις κη.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι 28.  
εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παρα-  
βαλεῖν, ἐλλεῖπον εἶδει παραλληλογράμμῳ,  
ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι. δεῖ δὲ τὸ διδόμενον  
εὐθύγραμμον, ὃ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ  
μείζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παρα-  
βαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῷ ἐλλείματι  
τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ, ὃ δεῖ  
ὅμοιον ἐλλείπειν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $ΑΒ$ , τὸ δὲ δο- Fig. 28.  
θέν εὐθύγραμμον, ὃ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν  $ΑΒ$  παρα-  
βαλεῖν, τὸ  $Γ$ , μὴ μείζον ὄν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας  
τῆς  $ΑΒ$  παραβαλλομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείματι, ὃ δὲ  
δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, τὸ  $Δ$ . δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖ-  
σαν εὐθεῖαν τὴν  $ΑΒ$  τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ  $Γ$   
ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἶδει  
παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ  $Δ$ .

Τετμήσθω ἡ  $ΑΒ$  δίχα κατὰ τὸ  $Ε$  σημεῖον, καὶ  
ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς  $ΕΒ$  τῷ  $Δ$  ὅμοιον καὶ ὁμοίως  
κείμενον τὸ  $ΕΒΖΗ$ , καὶ συμπληρώσθω τὸ  $ΑΗ$   
παραλληλόγραμμον.

Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ  $ΑΗ$  τῷ  $Γ$ , γενοῦς ἂν  
εἴη τὸ ἐπιταχθέν. παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δο-  
θεῖσαν εὐθεῖαν τὴν  $ΑΒ$  τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ  
τῷ  $Γ$  ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ  $ΑΗ$ , ἐλλεῖπον εἶ-  
δει παραλληλογράμμῳ τῷ  $ΕΖ$ , ὁμοίῳ ὄντι τῷ  $Δ$ .  
Εἰ δὲ οὐ μείζον ἐστὶ τὸ  $ΘΕ$  τοῦ  $Γ$ . Ἴσον δὲ τὸ  
 $ΘΕ$  τῷ  $ΗΒ$ . μείζον ἄρα καὶ τὸ  $ΗΒ$  τοῦ  $Γ$ . Ὡς

δὴ μείζον ἐστὶ τὸ  $HB$  τοῦ  $\Gamma$ , ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ  $\Delta$  ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ  $KAMN$ . Ἀλλὰ τὸ  $\Delta$  τῷ  $HB$  ἐστὶν ὁμοιον· καὶ τὸ  $KM$  ἄρα τῷ  $HB$  ἐστὶν ὁμοιον. Ἐστω ὁμόλογος ἡ μὲν  $KA$  τῇ  $HE$ , ἡ δὲ  $AM$  τῇ  $HZ$ . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ  $HB$  τοῖς  $\Gamma$   $KM$ , μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ  $HB$  τοῦ  $KM$  μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν  $HE$  τῆς  $KA$ , ἡ δὲ  $HZ$  τῆς  $AM$ . Κείσθω τῇ μὲν  $KA$  ἴση ἡ  $H\Xi$ , τῇ δὲ  $AM$  ἴση ἡ  $HO$ , καὶ συμπληρώσθω τὸ  $\Xi H O \Pi$  παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὁμοιὸν ἐστὶ τὸ  $H\Pi$  τῷ  $KM$ . Ἀλλὰ τὸ  $KM$  τῷ  $HB$  ὁμοιὸν ἐστὶ· καὶ τὸ  $H\Pi$  ἄρα τῷ  $HB$  ὁμοιὸν ἐστὶ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὸ  $H\Pi$  τῷ  $HB$ . Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ  $H\Pi B$ , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ  $BH$  τοῖς  $\Gamma$   $KM$ , ὥν τὸ  $H\Pi$  τῷ  $KM$  ἐστὶν ἴσον· λοιπὸς ἄρα ὁ  $Y\Phi X$  γνώμων λοιπῷ τῷ  $\Gamma$  ἴσος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ  $O\rho$  τῷ  $\Xi\Sigma$ , κοινὸν προσκείσθω τὸ  $\Pi B$ · ὅλον ἄρα τὸ  $OB$  ὅλῳ τῷ  $\Xi B$  ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ  $\Xi B$  τῷ  $TE$  ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ  $AE$  πλευρὰ τῇ  $EB$  ἐστὶν ἴση· καὶ τὰ  $TE$  ἄρα τῷ  $OB$  ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ  $\Sigma\Sigma$ · ὅλον ἄρα τὰ  $T\Sigma$  ὅλῳ τῷ  $Y\Phi Y$  γνώμονι ἴσον ἐστί. Ἀλλὰ ὁ  $Y\Phi X$  γνώμων τῷ  $\Gamma$  ἐδείχθη ἴσος· καὶ τὸ  $\Sigma T$  ἄρα τῷ  $\Gamma$  ἐστὶν ἴσον.

Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν  $AB$  τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ  $\Gamma$  ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ  $\Sigma T$  ἑλλειπὸν εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ  $\Pi B$  ὁμοίῳ ὄντι τῷ  $\Delta$  (ἐπειδὴ περὶ τὸ  $\Pi B$  τῷ  $H\Pi$  ὁμοιὸν ἐστίν)· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις xθ'.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι 29.  
εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον πα-

ραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἶδει παραλληλογράμμω ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ , τὸ δὲ δο- Fig. 29.  
θέν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν  $AB$  παρα-  
βαλεῖν, τὸ  $\Gamma$ , ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβάλλειν, τὸ  $\Delta$ .  
δεῖ δὴ παρὰ τὴν  $AB$  εὐθεῖαν τῷ  $\Gamma$  εὐθυγράμμω  
ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἶ-  
δει παραλληλογράμμω ὁμοίῳ τῷ  $\Delta$ .

Τετμήσθω ἡ  $AB$  δίχα κατὰ τὸ  $E$ , καὶ ἀναγε-  
γράφθω ἀπὸ τῆς  $EB$  τῷ  $\Delta$  ὅμοιον καὶ ὁμοίως κεί-  
μενον παραλληλόγραμμον τὸ  $BZ$ , καὶ συναμφοτέροις  
μὲν τοῖς  $BZ$   $\Gamma$  ἴσον, τῷ δὲ  $\Delta$  ὅμοιον καὶ ὁμοίως  
κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ  $H\Theta$ . ὅμοιον ἄρα ἐστὶ  
τὸ  $H\Theta$  τῷ  $EA$ . Ὁμόλογος δὲ ἐστω ἡ μὲν  $K\Theta$  τῇ  
 $Z\Lambda$ , ἡ δὲ  $KH$  τῇ  $ZE$ . Καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ  $H\Theta$ .  
τοῦ  $ZB$ , μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν  $K\Theta$  τῆς  $Z\Lambda$ ,  
ἡ δὲ  $KH$  τῆς  $ZE$ , Ἐκβεβλήσθωσαν αἱ  $Z\Lambda$   $ZE$ , καὶ  
τῇ μὲν  $K\Theta$  ἴση ἐστω ἡ  $Z\Lambda M$ , τῇ δὲ  $KH$  ἴση ἡ  
 $ZEN$ , καὶ συμπεπληρώσθω τὸ  $MN$ . τὸ  $MN$  ἄρα  
τῷ  $H\Theta$  ἴσον τέ ἐστὶ καὶ ὅμοιον. Ἀλλὰ τὸ  $H\Theta$  τῷ  
 $EA$  ἐστὶν ὅμοιον. καὶ τὸ  $MN$  ἄρα τῷ  $EA$  ὁμοίον  
ἐστὶ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὸ  $EA$  τῷ  
 $MN$ . Ἦχθω αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ  $Z\Xi$ , καὶ κατα-  
γεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ  $H\Theta$  τοῖς  $EA$   $\Gamma$  ἀλλὰ  
τὸ  $H\Theta$  τῷ  $MN$  ἴσον ἐστὶ. καὶ τὸ  $MN$  ἄρα τοῖς  
 $EA$   $\Gamma$  ἴσον ἐστὶ. Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ  $EA$ . λοι-  
πὸς ἄρα ὁ  $\Psi X \Phi$  γνώμων τῷ  $\Gamma$  ἐστὶν ἴσος. Καὶ  
ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AE$  τῇ  $EB$ , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ  $AN$   
τῷ  $NB$ , τοῦτ' ἐστὶ τῷ  $AO$ . Κοινὸν προσκείσθω τὸ  
 $E\Xi$ . ὅλον ἄρα τὸ  $A\Xi$  ἴσον ἐστὶ τῷ  $\Phi X \Psi$  γνώμονι.  
Ἀλλὰ ὁ  $\Phi X \Psi$  γνώμων τῷ  $\Gamma$  ἴσος ἐστὶ. καὶ τὸ  $A\Xi$   
ἄρα τῷ  $\Gamma$  ἴσον ἐστίν.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν  $AB$  τῷ

δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ  $\Gamma$  ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ  $A\Xi$ , ὑπερβάλλον εἶδει παραλληλόγραμμῳ τῷ  $\Pi O$  ὁμοίῳ ὄντι τῷ  $\Delta$ , (ἐπεὶ καὶ τῷ  $E\Delta$  ἐστὶν ὁμοιον τὸ  $O\Pi$ ). ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κ.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην 30.  
ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ  $AB$ . Fig. 30.  
δεῖ δὴ τὴν  $AB$  εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς  $AB$  τετράγωνον τὸ  $B\Gamma$ , καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν  $A\Gamma$  τῷ  $B\Gamma$  ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ  $\Gamma\Delta$  ὑπερβάλλον εἶδει τῷ  $A\Delta$  ὁμοίῳ τῷ  $B\Gamma$ .

Τετράγωνον δὴ ἐστὶ τὸ  $B\Gamma$ . τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ  $A\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ  $B\Gamma$  τῷ  $\Gamma\Delta$ , κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ  $\Gamma E$ . λοιπὸν ἄρα τὸ  $BZ$  λοιπῷ τῷ  $A\Delta$  ἐστὶν ἴσον. Ἐστὶ δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον. τῶν  $BZ$   $A\Delta$  ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $ZE$  πρὸς τὴν  $E\Delta$ , οὕτως ἡ  $AE$  πρὸς τὴν  $EB$ . Ἰση δὲ ἡ μὲν  $ZE$  τῇ  $A\Gamma$ , τοῦτ' ἐστὶ τῇ  $AB$ , ἡ δὲ  $E\Delta$  τῇ  $AE$ . ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $AE$ , οὕτως ἡ  $AE$  πρὸς τὴν  $EB$ . Μείζων δὲ ἡ  $BA$  τῆς  $AE$ . μείζων ἄρα καὶ ἡ  $AE$  τῆς  $EB$ .

Ἡ ἄρα  $AB$  εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ  $E$ , καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα ἐστὶ τὸ  $AE$ . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λά.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ 31.  
τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρ-

θὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἶδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ  $ABΓ$ , ὀρθὴν  $Fig. 31.$  ἔχον τὴν ὑπὸ  $BAΓ$  γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς  $BΓ$  εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $BA$   $ΑΓ$  εἶδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις.

Ἦχθω κάθετος ἡ  $ΑΔ$ .

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ  $ABΓ$  ἀπὸ τῆς πρὸς τὸ  $A$  ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν  $BΓ$  βάσιν κάθετος ἤκται ἡ  $ΑΔ$ · τὰ  $ABΔ$   $ΑΔΓ$  ἄρα πρὸς τῇ καθετῷ τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ  $ABΓ$  καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὁμοίόν ἐστι τὸ  $ABΓ$  τῷ  $ABΔ$ , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $ΓB$  πρὸς τὴν  $BA$ , οὕτως ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $BΔ$ . Καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ὡς ἄρα ἡ  $ΓB$  πρὸς τὴν  $BΔ$ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $ΓB$  εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $BA$  τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΔ$ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $BΓ$  εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $ΓΑ$ . ὥστε καὶ ὡς ἡ  $BΓ$  πρὸς τὰς  $BΔ$   $ΔΓ$ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $BΓ$  εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν  $BA$   $ΑΓ$  τὰ ὅμοια, καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. Ἰση δὲ ἡ  $BΓ$  ταῖς  $BΔ$   $ΔΓ$ · ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $BΓ$  εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν  $BA$   $ΑΓ$  εἶδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τρίγωνοις τὸ ἀπὸ . . . καὶ τὰ ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις 18.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν 32. γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους

αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$   $ΔΓΕ$ , τὰς δύο Fig. 32.  
πλευρὰς τὰς  $ΒΑ$   $ΑΓ$  ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς  $ΓΔ$   
 $ΔΕ$  ἀνάλογον ἔχοντα, ὥς μὲν τὴν  $AB$  πρὸς τὴν  $ΑΓ$ ,  
οὕτως τὴν  $ΔΓ$  πρὸς τὴν  $ΔΕ$ , παράλληλον δὲ τὴν  
μὲν  $AB$  τῇ  $ΔΓ$ , τὴν δὲ  $ΑΓ$  τῇ  $ΔΕ$ . λέγω ὅτι ἐπ' εὐ-  
θείας ἐστὶν ἡ  $ΒΓ$  τῇ  $ΓΕ$ .

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $ΔΓ$  καὶ  
εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ  $ΑΓ$ , αἱ ἐναλλὰξ γω-  
νίαι αἱ ὑπὸ  $ΒΑΓ$   $ΑΓΔ$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Διὰ τὰ  
αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΓΔΕ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΓΔ$  ἐστὶν ἴση·  
ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΓΔΕ$  ἐστὶν ἴση. Καὶ  
ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι τὰ  $ABΓ$   $ΔΓΕ$  μίαν γωνίαν  
τὴν πρὸς τῷ  $Α$  μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ  $Δ$  ἴσην ἔχον-  
τα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον,  
ὥς τὴν  $ΒΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΓ$ , οὕτως τὴν  $ΓΔ$  πρὸς τὴν  
 $ΔΕ$ . ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΓΕ$   
τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $ABΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΔΓΕ$ .  
Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$  τῇ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  ἴση· ὅλη  
ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΓΕ$  δυσὶ ταῖς ὑπὸ  $ABΓ$   $ΒΑΓ$  ἴση  
ἐστί. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$ · αἱ ἄρα ὑπὸ  
 $ΑΓΕ$   $ΑΓΒ$  ταῖς ὑπὸ  $ΒΑΓ$   $ABΓ$   $ΑΓΒ$  ἴσαι εἰσὶν.  
Ἀλλ' αἱ ὑπὸ  $ΒΑΓ$   $ABΓ$   $ΑΓΒ$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι  
εἰσὶ· καὶ αἱ ὑπὸ  $ΑΓΕ$   $ΑΓΒ$  ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι  
εἰσὶ. Πρὸς δὴ τινὶ εὐθείᾳ τῇ  $ΑΓ$ , καὶ τῷ πρὸς  
αὐτῇ σημείῳ τῷ  $Γ$  δύο εὐθεῖαι αἱ  $ΒΓ$   $ΓΕ$  μὴ ἐπὶ  
τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς  
ὑπὸ  $ΑΓΕ$   $ΑΓΒ$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ'  
εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΒΓ$  τῇ  $ΓΕ$ .

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ . . . καὶ τὰ ἐξῆς  
ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις ιγ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς τοῖς περιφερείαις ὥσι βεβηκυῖαν (ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.) 33.

Ἐστῶσαν ἴσοι κύκλοι οἱ  $AB\Gamma$   $\Delta EZ$ , καὶ πρὸς μὲν Fig. 33.  
τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς  $H$   $\Theta$  γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ  $BH\Gamma$   $E\Theta Z$ , πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ  $BA\Gamma$   $E\Delta Z$ . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ  $B\Gamma$  περιφέρεια πρὸς τὴν  $EZ$  περιφέρειαν, οὕτως ἡ τε ὑπὸ  $BH\Gamma$  γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ  $E\Theta Z$ , καὶ ἡ ὑπὸ  $BA\Gamma$  πρὸς τὴν ὑπὸ  $E\Delta Z$  (καὶ ἔτι ὁ  $H\beta\Gamma$  τομεὺς πρὸς τὸν  $\Theta EZ$  τομέα.)

Κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν  $B\Gamma$  περιφερείᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἐξῆς ὁσαιδηποτοῦν αἱ  $\Gamma K$   $K\Lambda$ , τῇ δὲ  $EZ$  περιφερείᾳ ἴσαι ὁσοιδηποτοῦν αἱ  $ZM$   $MN$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $HK$   $HA$   $\Theta M$   $\Theta N$ .

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ  $B\Gamma$   $\Gamma K$   $K\Lambda$  περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ  $BH\Gamma$   $\Gamma HK$   $KHA$  γωνίαι ἀλλήλαις. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ  $BA$  περιφέρεια τῆς  $B\Gamma$ . τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ  $BHA$  γωνία τῆς ὑπὸ  $BH\Gamma$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ  $EN$  περιφέρεια τῆς  $EZ$ , τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ  $EN\Theta$  γωνία τῆς ὑπὸ  $E\Theta Z$ . Εἰ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ  $BA$  περιφέρεια τῇ  $EN$  περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $BHA$  τῇ ὑπὸ  $EN\Theta$ . καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ  $BA$  περιφέρεια τῆς  $EN$  περιφέρειας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ  $BHA$  γωνία τῆς ὑπὸ  $EN\Theta$  γωνίας. καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν  $B\Gamma$   $EZ$ , δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ  $BH\Gamma$   $E\Theta Z$ , εἴληπται τῆς μὲν  $B\Gamma$  περιφέρειας καὶ τῆς ὑπὸ  $BH\Gamma$  γωνίας ἰσάκως πολλαπλασίων, ἢ τε  $BA$  περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ  $BHA$

γωνία, τῆς δὲ  $EZ$  περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ  $EΘZ$  γωνίας ἢ τε  $EN$  περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ  $EΘN$  γωνία· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ  $BA$  περιφέρεια τῆς  $EN$  περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ  $BHA$  γωνία τῆς ὑπὸ  $EΘN$  γωνίας καὶ εἰ ἴση, ἴση καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $BΓ$  περιφέρεια πρὸς τὴν  $EZ$ , οὕτως ἡ ὑπὸ  $BHΓ$  γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ  $EΘZ$ . Ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ  $BHΓ$  γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ  $EΘZ$ , οὕτως ἡ ὑπὸ  $BAΓ$  πρὸς τὴν ὑπὸ  $EΔZ$ , διπλασίων γὰρ ἑκατέρωθεν· καὶ ὡς ἄρα ἡ  $BΓ$  περιφέρεια πρὸς τὴν  $EZ$  περιφέρειαν, οὕτως ἡ τε ὑπὸ  $BHΓ$  γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ  $EΘZ$ , καὶ ἡ ὑπὸ  $BAΓ$  πρὸς τὴν ὑπὸ  $EΔZ$ .

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν· ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὥσι βεβηκῦναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

(Λέγω ὅτι καὶ ὡς ἡ  $BΓ$  περιφέρεια πρὸς τὴν  $EZ$  περιφέρειαν, οὕτως ὁ  $HΒΓ$  τομεὺς πρὸς τὸν  $ΘEZ$  τομέα.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ  $BΓ$   $ΓΚ$ , καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῶν  $BΓ$   $ΓΚ$  περιφερειῶν τῶν  $\Xi$   $O$  σημείων, ἐπεξεύχθωσαν καὶ αἱ  $B\Xi$   $\XiΓ$   $ΓO$   $OK$ .

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ  $BH$   $HΓ$  δυσὶ ταῖς  $ΓH$   $HΚ$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι καὶ βάσεις ἡ  $BΓ$  τῇ  $ΓΚ$  ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ  $BHΓ$  τρίγωνον τῷ  $HΓΚ$  τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $BΓ$  περιφέρεια τῇ  $ΓΚ$  περιφερείᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ ἡ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφερείᾳ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $B\XiΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΓOK$  ἐστὶν ἴση· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $B\XiΓ$  τμήμα τῷ  $ΓOK$  τμήματι· καὶ εἰσὶν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν  $BΓ$   $ΓΚ$ . Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $B\XiΓ$  τμήμα τῷ  $ΓOK$  τμήματι. Ἔστι δὲ καὶ τὸ  $BHΓ$  τρίγωνον τῷ  $HΓΚ$  τριγώνῳ



ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ  $H\Gamma$  τομεὺς ὅλῳ τῷ  $H\Gamma K$  τομεῖ ἴσος ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ  $H\Gamma A$  τομεὺς ἑκατέρῳ τῶν  $H\Gamma K$   $H\Gamma B$  ἴσος ἐστίν· οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς οἱ  $H\Gamma$   $H\Gamma K$   $H\Gamma A$  ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ  $\Theta E Z$   $\Theta Z M$   $\Theta M N$  τομεῖς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶν· ὅσαπλασίῳν ἄρα ἐστὶν ἡ  $B A$  περιφέρεια τῆς  $B\Gamma$  περιφερείας, τοσαυταπλασίῳν ἐστὶ καὶ ὁ  $H B A$  τομεὺς τοῦ  $H\Gamma$  τομέως. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσαπλασίῳν ἐστὶν ἡ  $E N$  περιφέρεια τῆς  $E Z$  περιφερείας, τοσαυταπλασίῳν ἐστὶ καὶ ὁ  $\Theta E N$  τομεὺς τοῦ  $\Theta E Z$  τομέως. Εἰ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ  $B A$  περιφέρεια τῇ  $E N$  περιφερείᾳ, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ  $H B A$  τομεὺς τῷ  $\Theta E N$  τομεῖ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ  $B A$  περιφέρεια τῆς  $E N$  περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ  $H B A$  τομεὺς τοῦ  $\Theta E N$  τομέως· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν τῶν  $B\Gamma$   $E Z$  περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν  $H\Gamma$   $\Theta E Z$  τομέων, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια, τῆς μὲν  $B\Gamma$  περιφερείας καὶ τοῦ  $H\Gamma$  τομέως ἢ τε  $B A$  περιφέρεια καὶ ὁ  $H B A$  τομεὺς, τῆς δὲ  $E Z$  περιφερείας καὶ τοῦ  $\Theta E Z$  τομέως ἰσάκεις πολλαπλάσια, ἢ τε  $E N$  περιφέρεια καὶ ὁ  $\Theta E N$  τομεὺς· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ  $B A$  περιφέρεια τῆς  $E N$  περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ  $H B A$  τομεὺς τοῦ  $\Theta E N$  τομέως· καὶ εἰ ἴση, ἴσος· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $B\Gamma$  περιφέρεια πρὸς τὴν  $E Z$ , οὕτως ὁ  $H\Gamma$  τομεὺς πρὸς τὸν  $\Theta E Z$  τομέα.)

### Π ὁ ρ ι σ μ α.

(Καὶ δῆλον ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.)

Τέλος τοῦ ἑκτοῦ βιβλίου.

**ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**  
**ΒΙΒΛΙΟΝ ἙΒΔΟΜΟΝ.**

~~~~~

Ὅροι

- α. Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἐν λέγεται, 1.
- β. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. 2.
- γ. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὃ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα. 3.
- δ. Μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρῇ. 4.
- ε. Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῇται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος. 5.
- ς. Ἄρτιος δὲ ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ δίχα διαιρούμενος. 6.
- ζ. Περισσὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα, ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ. 7.
- η. Ἀρτιάκῃς ἄρτιος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. 8.
- θ. Ἀρτιάκῃς δὲ περισσὸς ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν. 9.
- ι. (Περισσάκῃς δὲ ἀρτιὸς ἐστὶν, ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. 10.
- ια. Περισσάκῃς δὲ περισσὸς ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν. 11.
- ιβ. Πρῶτος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος. 12.

- γ. Πρῶτοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ 13.
εἰσιν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.
- δ. Σύνθετος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ ἀριθμῷ τινι 14.
μετρούμενος.
- ε. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ 15.
εἰσιν οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.
- ς. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν 16.
λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες τοσαυτά-
κις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηται τις.
- ζ. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες 17.
ἀλλήλους ποιῶσιν τινὰ, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖ-
ται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλ-
λήλους ἀριθμοὶ.
- η. Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες 18.
ἀλλήλους ποιῶσιν τινὰ, ὁ γενόμενος στερεὸς καλεῖ-
ται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλ-
λήλους ἀριθμοὶ.
- θ. Τετράγωνος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ ἰσάκις 19.
ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.
- ι. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, ἢ ὁ ὑπὸ 20.
τριῶν ἀριθμῶν ἴσων περιεχόμενος.
- κα. Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶ- 21.
τος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις
ἢ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη.
- κβ. Ὅμοιαι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθ- 22.
μοὶ εἰσιν οἱ ἀνάλογόν ἔχοντες τὰς πλευράς.
- κγ. Τέλεια ἀριθμὸς ἐστὶν, ὁ τοῖς ἐαυτοῦ 23.
μέρεσιν ἴσος ὢν.
-

Πρότασις α.

Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυ- 1.
φαίρουμένου δὲ αἰ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ
τοῦ μείζονος, εἴαν ὁ λειπόμενος μηδέποτε
καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λήφθῃ
μονάς· οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς
ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο γὰρ ἀνίσων ἀριθμῶν τῶν AB $\Gamma\Delta$ ἀνθυφαίρου- Fig. 1.
μένου αἰ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος ὁ λειπόμενος
μηδέποτε καταμετρεῖται τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λήφθῃ
μονάς· λέγω ὅτι οἱ AB $\Gamma\Delta$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἶ-
σι, τοῦτ' ἐστίν, ὅτι τοὺς AB $\Gamma\Delta$ μονάς μόνῃ μετρεῖ.

Εἰ γὰρ μὴ εἶσιν οἱ AB $\Gamma\Delta$ πρῶτοι πρὸς ἀλλή-
λους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρεῖτω, καὶ
ἔστω ὁ E · καὶ ὁ μὲν $\Gamma\Delta$ τὸν AB μετρῶν λειπέτω
ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ZA , ὁ δὲ ZA τὸν $\Delta\Gamma$ μετρῶν
λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν $H\Gamma$, ὁ δὲ $H\Gamma$ τὸν ZA
μετρῶν λειπέτω μονάδα τὴν ΘA .

Ἐπεὶ οὖν ὁ E τὸν $\Gamma\Delta$ μετρεῖ, ὁ δὲ $\Gamma\Delta$ τὸν
 ZB μετρεῖ· καὶ ὁ E ἄρα τὸν ZB μετρεῖ· μετρεῖ
δὲ καὶ ὅλον τὸν AB · καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν AZ με-
τρήσει· Ὁ δὲ AZ τὸν ΔH μετρεῖ· καὶ ὁ E ἄρα
τὸν ΔH μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν $\Gamma\Delta$ · καὶ
λοιπὸν ἄρα τὸν ΓH μετρήσει· Ὁ δὲ ΓH τὸν $Z\Theta$
μετρεῖ· καὶ ὁ E ἄρα τὸν $Z\Theta$ μετρήσει· μετρεῖ δὲ
καὶ ὅλον τὸν ZA · καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν $A\Theta$ μονάδα
μετρήσει, ἀριθμὸς ὢν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα
τοὺς AB $\Gamma\Delta$ ἀριθμοὺς μετρήσει τις ἀριθμός· οἱ AB
 $\Gamma\Delta$ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἶσιν· ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Πρότασις β.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρῶτων 2.
πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν
μέτρον εὕρεται.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι Fig. 2.
πρὸς ἀλλήλους οἱ AB $\Gamma\Delta$, καὶ ἔστω ἐλάσσων ὁ $\Gamma\Delta$.
δεῖ δὴ τῶν AB $\Gamma\Delta$ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰ μὲν οὖν ὁ $\Gamma\Delta$ τὸν AB μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ
ἑαυτὸν· ὁ $\Gamma\Delta$ ἄρα τῶν AB $\Gamma\Delta$ κοινὸν μέτρον ἐστί.
Καὶ φανερόν ὅτι καὶ μέγιστον· οὐδεὶς γὰρ μείζων
τοῦ $\Gamma\Delta$ τὸν $\Gamma\Delta$ μετρήσει.

Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ $\Gamma\Delta$ τὸν AB , τῶν AB $\Gamma\Delta$
ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάττονος ἀπὸ τοῦ μείζο-
νος, ληφθήσεται τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ
ἑαυτοῦ. Μονὰς μὲν γὰρ οὐ ληφθήσεται· εἰ δὲ μὴ·
ἔσονται οἱ AB $\Gamma\Delta$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ οὐχ
ὑπόκειται. Ληφθήσεται ἄρα τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει
τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Καὶ ὁ μὲν $\Gamma\Delta$ τὸν AB μετρῶν
λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν EA . ὁ δὲ EA τὸν $\Delta\Gamma$
μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν $Z\Gamma$, ὁ δὲ ΓZ
τὸν EA μετρεῖτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ ΓZ τὸν AE μετρεῖ,
ὁ δὲ AE τὸν ΔZ μετρεῖ· καὶ ὁ ΓZ ἄρα τὸν ΔZ με-
τρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· καὶ ὅλον ἄρα τὸν $\Gamma\Delta$
μετρήσει. Ὁ δὲ $\Gamma\Delta$ τὸν BE μετρεῖ· καὶ ὁ ΓZ ἄρα
τὸν BE μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν EA · καὶ ὅλον
ἄρα τὸν BA μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν $\Gamma\Delta$. ὁ ΓZ
ἄρα τοὺς AB $\Gamma\Delta$ μετρεῖ· ὁ ΓZ ἄρα τῶν AB $\Gamma\Delta$
κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ
γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ ΓZ τῶν AB $\Gamma\Delta$ μέγιστον κοινὸν
μέτρον, μετρήσει τις τοὺς AB $\Gamma\Delta$ ἀριθμοὺς ἀριθ-
μὸς μείζων ὢν τοῦ ΓZ . Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ H .
Καὶ ἐπεὶ ὁ H τὸν $\Gamma\Delta$ μετρεῖ, ὁ δὲ $\Gamma\Delta$ τὸν BE με-
τρεῖ· καὶ ὁ H ἄρα τὸν BE μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ
ὅλον τὸν BA · καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν AE μετρήσει.
Ὁ δὲ AE τὸν ΔZ μετρεῖ· καὶ ὁ H ἄρα τὸν ΔZ με-
τρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν $\Delta\Gamma$ · καὶ λοιπὸν ἄρα
τὸν ΓZ μετρήσει, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν
ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB $\Gamma\Delta$ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς

τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ ΓΖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Πρότασις γ.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων 3. πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὗρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρώτοι Fig. 3. πρὸς ἀλλήλους οἱ Α Β Γ· δεῖ δὴ τῶν Α Β Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὗρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ· ὁ δὲ Δ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖτω πρότερον· μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς Α Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α Β Γ μετρεῖ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α Β Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ Δ τῶν Α Β Γ μέγιστον κοινὸν μέτρον· μετρήσει τις τοὺς Α Β Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Δ. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τοὺς Α Β Γ μετρεῖ· καὶ τοὺς Α Β ἄρα μετρήσας καὶ τὸ τῶν Α Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α Β Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Δ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α Β Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

Μὴ μετρεῖτω δὲ ὁ Δ τὸν Γ· λέγω πρώτον, ὅτι οἱ Δ Γ οὐκ εἰσι πρώτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α Β Γ οὐκ εἰσι πρώτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς· ὁ δὲ τοὺς Α Β Γ μετρῶν καὶ

τῶν A B μετρήσει, καὶ τὸ τῶν A B μέγιστον κοι-
 νὸν μέτρον τὸ A μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ .
 τοὺς A Γ ἄρα ἀριθμὸς τις μετρήσει· οἱ A Γ ἄρα
 οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Εἰλήφθω οὖν αὐ-
 τῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, ὃ E . Καὶ ἐπεὶ ὁ
 E τὸν A μετρεῖ, ὃ δὲ A τῶν A B μετρεῖ, καὶ ὁ B
 ἄρα τοὺς A B μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ . ὁ E
 ἄρα τοὺς A B Γ μετρεῖ· ὁ E ἄρα τῶν A B Γ κοι-
 νὸν ἐστὶ μέτρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ
 γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ E τῶν A B Γ τὸ μέγιστον κοινὸν
 μέτρον, μετρήσει τις τοὺς A B Γ ἀριθμοὺς ἀριθ-
 μὸς μείζων ὢν τοῦ E . Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Z .
 Καὶ ἐπεὶ ὁ Z τοὺς A B Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς A B
 μετρεῖ, καὶ τὸ τῶν A B ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον
 μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν A B μέγιστον κοινὸν μέτρον
 ἐστὶν ὁ A . ὁ Z ἄρα τὸν A μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ
 τὸν Γ . ὁ Z ἄρα τοὺς A Γ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν A Γ
 ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Γ
 A μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ E . ὁ Z ἄρα τὸν
 E μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνα-
 τόν· οὐκ ἄρα τοὺς A B Γ ἀριθμὸς τις μετρήσει
 μείζων ὢν τοῦ E . ὁ E ἄρα τῶν A B Γ μέγιστόν
 ἐστὶ κοινὸν μέτρον ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

(Ἐκ δὴ τούτων φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθ-
 μὸς τρεῖς μετρή, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέ-
 τρον μετρήσει.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ πλειόνων ἀριθμῶν
 δοθέντων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὐρήσομεν.)

Πρότασις δ.

Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσ- 4.
 σων τοῦ μείζονος, ἥτοι μέρος ἐστὶν ἢ
 μέρος.

Ἐστώσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ A $BΓ$, καὶ ἔστω Fig. 4.
ἐλάσσων ὁ $BΓ$. λέγω ὅτι ὁ $BΓ$ τοῦ A ἦτοι μέρος
ἐστὶν ἢ μέρος.

Οἱ A $BΓ$ γὰρ ἦτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰ-
σὶν, ἢ οὐ. Ἐστώσαν πρότερον πρῶτοι πρὸς ἀλλή-
λους. Διαιρεθέντος δὴ τοῦ $BΓ$ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μο-
νάδας, ἔσται ἐκάστη μονὰς τῶν ἐν τῷ $BΓ$ μέρος τι
τοῦ A , ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ $BΓ$ τοῦ A .

Μὴ ἔστώσαν δὴ οἱ A $BΓ$ πρῶτοι πρὸς ἀλλή-
λους· ὁ δὴ $BΓ$ τὸν A ἦτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Εἰ
μὲν οὖν καταμέτρει ὁ $BΓ$ τὸν A · μέρος ἐστὶν ὁ $BΓ$
τοῦ A . Εἰ δὲ οὐ· εἰλήφθω τῶν A $BΓ$ μέγιστον κοι-
νὸν μέτρον ὁ Δ , καὶ διηρήσθω ὁ $BΓ$ εἰς τοὺς τῷ Δ
ἴσους, τοὺς BE EZ $ZΓ$. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν A με-
τρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ Δ τοῦ A . ἴσος δὲ ἐκάστῳ τῶν
 BE EZ $ZΓ$ · καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν BE EZ $ZΓ$ τοῦ
 A μέρος ἐστὶν· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ $BΓ$ τοῦ A .

Ἄπας ἄρα ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ . . . καὶ τὸ
ἐξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Πρότασις 4

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτε- 5.
ρος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ συναμφοτέ-
ρος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται,
ὅπερ ὁ εἰς τοῦ ἐνός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A ἀριθμοῦ τοῦ $BΓ$ μέρος ἔστω, Fig. 5.
καὶ ἕτερος ὁ A ἑτέρου τοῦ EZ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ
ὁ A τοῦ $BΓ$. λέγω ὅτι καὶ συναμφοτέρος ὁ A Δ
συναμφοτέρου τοῦ $BΓ$ EZ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ
ὁ A τοῦ $BΓ$.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ $BΓ$, τὸ αὐτὸ
μέρος ἐστὶ καὶ ὁ A τοῦ EZ · ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ

$BΓ$ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ A , τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ EZ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ . Δηρήσθω ὁ μὲν $BΓ$ εἰς τοὺς τῷ A ἴσους τοὺς BH $HΓ$, ὁ δὲ EZ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς $EΘ$ $ΘZ$. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν BH $HΓ$ τῷ πλῆθει τῶν $EΘ$ $ΘZ$. Καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν BH τῷ A , ὁ δὲ $EΘ$ τῷ Δ . καὶ οἱ BH $EΘ$ ἄρα τοῖς A Δ ἴσοι εἰσὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ $HΓ$ $ΘZ$ τοῖς A Δ ἴσοι εἰσὶν. ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ $BΓ$ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ A , τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τοῖς $BΓ$ EZ ἴσοι τοῖς A Δ . ὅσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ $BΓ$ τοῦ A , τοσανταπλασίων ἐστὶ καὶ συναμρότερος ὁ $BΓ$ EZ συναμφοτέρου τοῦ A Δ . ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ $BΓ$, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρου ὁ A Δ συναμφοτέρου τοῦ $BΓ$ EZ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾗ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη. καὶ συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἰς τοῦ ἑνός. 6.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, Fig 6. καὶ ἕτερος ὁ ΔE ἑτέρου τοῦ Z τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ AB τοῦ Γ . λέγω ὅτι καὶ συναμφοτέρου ὁ AB ΔE συναμφοτέρου τοῦ Γ Z τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὁ AB τοῦ Γ .

Ἐπεὶ γὰρ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ AB τοῦ Γ , τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔE τοῦ Z . ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μέρη τοῦ Γ , τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΔE μέρη τοῦ Z . Δηρήσθω ὁ μὲν AB εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ AH HB , ὁ δὲ ΔE εἰς τὰ τοῦ Z μέρη τὰ $\Delta\Theta$ ΘE . ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH HB τῷ πλῆθει τῶν $\Delta\Theta$ ΘE . Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ AH

τοῦ Γ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $\Delta\Theta$ τοῦ Z . ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ $\Delta\Η$ τοῦ Γ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρος ὁ $\Delta\Η$ $\Delta\Theta$ συναμφοτέρου τοῦ Γ Z . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ $\ΗΒ$ τοῦ Γ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρος ὁ $\ΗΒ$ $\Theta\Xi$ συναμφοτέρου τοῦ Γ Z . ἂ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ $ΑΒ$ τοῦ Γ , τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφοτέρος ὁ $ΑΒ$ $\Delta\Xi$ συναμφοτέρου τοῦ Γ Z . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾗ, ὅπερ 7. ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γάρ ὁ $ΑΒ$ ἀριθμοῦ τοῦ $\Gamma\Delta$ μέρος Fig. 7. ἔστω, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ $\Delta\Xi$ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓZ . λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ $ΕΒ$ λοιποῦ τοῦ $Z\Delta$ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὅλος ὁ $ΑΒ$ ὅλου τοῦ $\Gamma\Delta$.

Ὁ γάρ μέρος ἐστὶν ὁ $\Delta\Xi$ τοῦ ΓZ , τὸ αὐτὸ μέρος ἔστω καὶ ὁ $ΕΒ$ τοῦ $\Gamma\Η$. Καὶ ἐπεὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ $\Delta\Xi$ τοῦ ΓZ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $ΕΒ$ τοῦ $\Gamma\Η$. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ $\Delta\Xi$ τοῦ ΓZ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $ΑΒ$ τοῦ $\Η Z$. ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ $ΑΒ$ τοῦ ΓZ , τὸ αὐτὸ μέρος ὑπόκειται καὶ ὁ $ΑΒ$ τοῦ $\Gamma\Delta$. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ $ΑΒ$ τοῦ $\Η Z$, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $ΑΒ$ τοῦ $\Gamma\Delta$. ὁ $ΑΒ$ ἄρα ἑκατέρου τῶν $\Η Z$ $\Gamma\Delta$ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ $\Η Z$ τῷ $\Gamma\Delta$. Κοινὸς ἀφηρήσθω ὁ ΓZ . λοιπὸς ἄρα ὁ $\Η\Gamma$ λοιπῷ τῷ $Z\Delta$ ἴσος ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ $\Delta\Xi$ τοῦ ΓZ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $ΕΒ$ τοῦ $\Η\Gamma$, ἴσος δὲ ὁ $\Η\Gamma$ τῷ $Z\Delta$. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ $\Delta\Xi$ τοῦ ΓZ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $ΕΒ$ τοῦ $Z\Delta$. Ἀλλὰ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ $\Delta\Xi$ τοῦ ΓZ , τὸ αὐτὸ

μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ $\Gamma\Delta$. ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ EB τοῦ $Z\Delta$, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ $\Gamma\Delta$. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ EB λοιποῦ τοῦ $Z\Delta$ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ $\Gamma\Delta$. ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Πρότασις η΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ἦ, ὅπερ 8. ἀφαιρεθεῖς ἀφαιρεθέντος καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ $\Gamma\Delta$ μέρη Fig. 8. ἔστω, ὅπερ ἀφαιρεθεῖς ὁ AE ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓZ . λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ EB λοιποῦ τοῦ $Z\Delta$ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ὅπερ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ $\Gamma\Delta$.

Κείσθω γὰρ τῷ AB ἴσος ὁ $H\Theta$. ὁ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ $H\Theta$ τοῦ $\Gamma\Delta$, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ AE τοῦ ΓZ . Δηρήσθω ὁ μὲν $H\Theta$ εἰς τὰ τοῦ $\Gamma\Delta$ μέρη τὰ HK $K\Theta$, ὁ δὲ AE εἰς τὰ τοῦ ΓZ μέρη τὰ AL LE . ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν HK $K\Theta$ τῷ πλῆθει τῶν AL LE . Καὶ ἐπεὶ, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ HK τοῦ $\Gamma\Delta$, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AL τοῦ ΓZ . μείζων δὲ ὁ $\Gamma\Delta$ τοῦ ΓZ . μείζων ἄρα καὶ ὁ HK τοῦ AL . Κείσθω τῷ AL ἴσος ὁ HM . ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ HK τοῦ $\Gamma\Delta$, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ HM τοῦ ΓZ . καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ MK λοιποῦ τοῦ $Z\Delta$ τὸ αὐτὸ, μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὅλος ὁ HK ὅλου τοῦ $\Gamma\Delta$. Πάλιν, ἐπεὶ, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ $K\Theta$ τοῦ $\Gamma\Delta$, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ LE τοῦ ΓZ , μείζων δὲ ὁ $\Gamma\Delta$ τοῦ ΓZ . μείζων ἄρα καὶ ὁ $K\Theta$ τοῦ LE . Κείσθω τῷ LE ἴσος ὁ KN . ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ $K\Theta$ τοῦ $\Gamma\Delta$, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ KN τοῦ ΓZ . καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ $N\Theta$ λοιποῦ τοῦ $Z\Delta$ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν,

ὅπερ ὅλος ὁ $KΘ$ ὅλου τοῦ $ΓΔ$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ
λοιπὸς ὁ $ΜΚ$ λοιποῦ τοῦ $ΖΔ$ τὸ αὐτὸ μέρος ὦν,
ὅπερ ὅλος ὁ $ΚΗ$ ὅλου τοῦ $ΔΓ$. καὶ συναμφοτέρως
ἄρα ὁ $ΜΚ ΝΘ$ τοῦ $ΔΖ$ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ
ὅλος ὁ $ΘΗ$ ὅλου τοῦ $ΔΓ$. Ἰσὸς δὲ συναμφοτέρως
μὲν ὁ $ΜΚ ΝΘ$ τῷ $ΕΒ$, ὁ δὲ $ΘΗ$ τῷ $ΒΑ$. καὶ λοι-
πὸς ἄρα ὁ $ΕΒ$ λοιποῦ τοῦ $ΖΔ$ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν,
ἅπερ ὅλος ὁ $ΑΒ$ ὅλου τοῦ $ΓΔ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ἦ, καὶ 9.
ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ ἐναλ-
λάξ, ὃ μέρος ἐστίν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ
τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ἢ τὰ αὐτὰ μέ-
ρη, καὶ ὁ δεῦτερος τοῦ τετάρτου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ $Α$ ἀριθμοῦ τοῦ $ΒΓ$ μέρος Fig. 9.
ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ $Δ$ ἑτέρου τοῦ $ΕΖ$ τὸ αὐτὸ μέρος,
ὅπερ ὁ $Α$ τοῦ $ΒΓ$. λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ὃ μέρος
ἐστίν ὁ $Α$ τοῦ $Δ$ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ
 $ΒΓ$ τοῦ $ΕΖ$, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη.

Ἐπεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστίν ὁ $Α$ τοῦ $ΒΓ$, τὸ αὐτὸ
μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $Δ$ τοῦ $ΕΖ$. ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ
 $ΒΓ$ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ $Α$, τοσούτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ $ΕΖ$
ἴσοι τῷ $Δ$. Διηγήσθω ὁ μὲν $ΒΓ$ εἰς τοὺς τῷ $Α$
ἴσους τοὺς $ΒΗ ΗΓ$, ὁ δὲ $ΕΖ$ εἰς τοὺς τῷ $Δ$ ἴσους
τοὺς $ΕΘ ΘΖ$. ἴσον ἔσται δὴ τὸ πλῆθος τῶν $ΒΗ$
 $ΗΓ$ τῷ πλῆθει τῶν $ΕΘ ΘΖ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ $ΒΗ ΗΓ$ ἀριθμοὶ ἀλλή-
λοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ $ΕΘ ΘΖ$ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλή-
λοις, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν $ΒΗ ΗΓ$ τῷ
πλήθει τῶν $ΕΘ ΘΖ$. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ $ΒΗ$ τοῦ
 $ΕΘ$ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $ΗΓ$ τοῦ $ΘΖ$
ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ὥστε καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ $ΒΗ$ τοῦ

$ΕΘ$ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρως ἔ
 $ΒΓ$ συναμφοτέρου τοῦ $ΕΖ$, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἴσος δὲ
ὁ μὲν $ΒΗ$ τῷ $Α$, ὁ δὲ $ΕΘ$ τῷ $Δ$. ὁ ἄρα μέρος
ἐστὶν ὁ $Α$ τοῦ $Δ$ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ
ὁ $ΒΓ$ τοῦ $ΕΖ$, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτε- 10.
ρος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ἐναλλάξ, ἃ μέ-
ρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ
αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρ-
του, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ $ΑΒ$ ἀριθμοῦ τοῦ $Γ$ μέρη ἔστω, Fig. 10.
καὶ ἕτερος ὁ $ΔΕ$ ἑτέρου τοῦ $Ζ$ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω
ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ $ΑΒ$ τοῦ $ΔΕ$, ἢ μέ-
ρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ $Γ$ τοῦ $Ζ$, ἢ τὸ αὐτὸ
μέρος.

Ἐπεὶ γὰρ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ $ΑΒ$ τοῦ $Γ$, τὰ αὐτὰ
μέρη ἐστὶ καὶ ὁ $ΔΕ$ τοῦ $Ζ$. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ
 $ΑΒ$ μέρη τοῦ $Γ$, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ $ΔΕ$ μέρη τοῦ
 $Ζ$. Δηρήσθω ὁ μὲν $ΑΒ$ εἰς τὰ τοῦ $Γ$ μέρη τὰ $ΑΗ$
 $ΗΒ$, ὁ δὲ $ΔΕ$ εἰς τὰ τοῦ $Ζ$ μέρη τὰ $ΔΘ$ $ΘΕ$. ἔσται
δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν $ΑΗ$ $ΗΒ$ τῷ πλῆθει τῶν
 $ΔΘ$ $ΘΕ$. Καὶ ἐπεὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ $ΑΗ$ τοῦ $Γ$, τὸ
αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $ΔΘ$ τοῦ $Ζ$, καὶ ἐναλλάξ, ὃ
μέρος ἐστὶν ὁ $ΑΗ$ τοῦ $ΔΘ$ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος
ἐστὶ καὶ ὁ $Γ$ τοῦ $Ζ$, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. Διὰ τὰ αὐτὰ
δὴ καὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ $ΗΒ$ τοῦ $ΘΕ$ ἢ μέρη, τὸ
αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $Γ$ τοῦ $Ζ$, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη·
ὥστε καὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ $ΑΗ$ τοῦ $ΘΔ$ ἢ μέρη, τὸ
αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $ΗΒ$ τοῦ $ΘΕ$, ἢ τὰ αὐτὰ μέ-
ρη· καὶ ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ $ΑΗ$ τοῦ $ΔΘ$, ἢ μέρη,
τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $ΑΒ$ τοῦ $ΔΕ$, ἢ τὰ αὐτὰ

μέρη· ἀλλ' ὃ μέρος ἐστὶν ὁ $ΑΗ$ τοῦ $ΔΘ$ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐδείχθη καὶ ὁ $Γ$ τοῦ $Ζ$, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ὅ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ $ΑΒ$ τοῦ $ΔΕ$ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ $Γ$ τοῦ $Ζ$, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ια.

Ἐὰν ἢ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρε- 11.
θῇς πρὸς ἀφαιρεθέντα· καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

Ἐστω ὡς ὅλος ὁ $ΑΒ$ πρὸς ὅλον τὸν $ΓΔ$, οὕτως Fig. 11.
ἀφαιρεθῇς ὁ $ΑΕ$ πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν $ΓΖ$ · λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ $ΕΒ$ πρὸς λοιπὸν τὸν $ΖΔ$ ἐστὶν, ὡς ὅλος ὁ $ΑΒ$ πρὸς ὅλον τὸν $ΓΔ$.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ $ΑΒ$ πρὸς τὸν $ΓΔ$, οὕτως ὁ $ΑΕ$ πρὸς τὸν $ΓΖ$ · ὅ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ $ΑΒ$ τοῦ $ΓΔ$ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $ΑΕ$ τοῦ $ΓΖ$, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ $ΕΒ$ λοιποῦ τοῦ $ΖΔ$ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη, ὅπερ ὁ $ΑΒ$ τοῦ $ΓΔ$. Ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ $ΕΒ$ πρὸς τὸν $ΖΔ$, οὕτως ὁ $ΑΒ$ πρὸς τὸν $ΓΔ$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιβ.

Ἐὰν ὡσιν ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ ἀνάλο- 12.
γον· ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἐπομένους.

Ἐστωσαν ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ $Α Β$ Fig. 12.
 $Γ Δ$, ὡς ὁ $Α$ πρὸς τὸν $Β$, οὕτως ὁ $Γ$ πρὸς τὸν $Δ$ · λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ $Α$ πρὸς τὸν $Β$, οὕτως οἱ $Α Γ$ πρὸς τοὺς $Β Δ$.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ $Α$ πρὸς τὸν $Β$, οὕτως ὁ $Γ$ πρὸς τὸν $Δ$ · ὅ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ $Α$ τοῦ $Β$ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $Γ$ τοῦ $Δ$, ἢ τὰ αὐτὰ

μέρη· καὶ συναμφοτέρως ἄρα ὁ A ὁ Γ συναμφοτέρως τοῦ B Δ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ A τοῦ B . Ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως οἱ A Γ πρὸς τοὺς B Δ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις γ.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾶσιν 13.
καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστώσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ A B Γ Δ Fig. 13.
ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ · λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔδονται, ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ , οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Δ .

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ · ὁ ἄρα μέρος ἐστίν ὁ A τοῦ B , ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ , ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἐναλλάξ ἄρα, ὁ μέρος ἐστίν ὁ A τοῦ Γ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ B τοῦ Δ , ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· Ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ , οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Δ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις δ.

Ἐὰν ᾶσιν ὅποσοιούνη ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι 14.
αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος καὶ σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ διττοῦ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἐστώσαν ὅποσοιούνη ἀριθμοὶ οἱ A B Γ , καὶ Fig. 14.
ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος καὶ σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ E Z , ὡς μὲν ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E , ὡς δὲ ὁ B πρὸς τὸν Γ , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z · λέγω ὅτι καὶ διττοῦ ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z .

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E · ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ B πρὸς τὸν E . Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Γ , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z · ἐναλλάξ

ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ B πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Z . Ὡς δὲ ὁ B πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Δ . καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Z . ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιε.

Ἐὰν μονὰς ἀριθμὸν τινὰ μετρῇ, ἰσάκεις 15.
δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν με-
τρῇ· καὶ ἐναλλάξ ἰσάκεις ἢ μονὰς τὸν τρί-
τον ἀριθμὸν μετρήσει, καὶ ὁ δεῦτερος
τέταρτον.

Μονὰς γὰρ ἢ A ἀριθμὸν τινὰ τὸν $B\Gamma$ μετρεῖ- Fig. 15.
τω, ἰσάκεις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ ἄλλον τινὰ ἀριθ-
μὸν τὸν EZ μετρεῖτω· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἰσάκεις
ἢ A μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ $B\Gamma$ τὸν EZ .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἢ A μονὰς τὸν $B\Gamma$ ἀριθμὸν
μετρεῖ, καὶ ὁ Δ τὸν EZ . ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ $B\Gamma$
μονάδες, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ EZ ἀριθμοὶ ἴσοι
τῷ Δ . Διηρήσθω ὁ μὲν $B\Gamma$ εἰς τὰ ἐν αὐτῷ μονάδας
τὰς BH $H\Theta$ $\Theta\Gamma$, ὁ δὲ EZ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους,
τοὺς EK $K\Lambda$ ΛZ . Ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν
 BH $H\Theta$ $\Theta\Gamma$ τῷ πλῆθει τῶν EK $K\Lambda$ ΛZ . Καὶ
ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ BH $H\Theta$ $\Theta\Gamma$ μονάδες ἀλλήλαις,
εἰσὶ δὲ καὶ οἱ EK $K\Lambda$ ΛZ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις
καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν BH $H\Theta$ $\Theta\Gamma$ μονά-
δων τῷ πλῆθει τῶν EK $K\Lambda$ ΛZ ἀριθμῶν· ἐστὶν
ἄρα ὡς ἢ BH μονὰς πρὸς τὸν EK ἀριθμὸν, οὕτως
ἢ $H\Theta$ μονὰς πρὸς τὸν $K\Lambda$ ἀριθμὸν, καὶ ἢ $\Theta\Gamma$ μο-
νάς πρὸς τὸν ΛZ ἀριθμὸν. Ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἰς
τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαν-
τες οἱ ἡγουμένοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἐπομένους·
ἐστὶν ἄρα ὡς ἢ BH μονὰς πρὸς τὸν EK ἀριθμὸν,
οὕτως ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν EZ . Τῇ δὲ ἢ BH μονὰς τῇ

A μονάδι, ὁ δὲ EK ἀριθμὸς τῷ Δ ἀριθμῷ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν EZ . Ἰσάκως ἄρα ἡ A μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ $B\Gamma$ τὸν EZ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες 16. ἀλλήλους ποιῶσιν τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ A B , καὶ ὁ μὲν A Fig. 16. τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ B τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ .

Ἐπεὶ γὰρ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ B ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ A μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ E μονὰς τὸν A ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκως ἄρα ἡ E μονὰς τὸν A ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ B τὸν Γ . ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκως ἡ E μονὰς τὸν B ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ A τὸν Γ . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ B τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ A ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ B μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ E μονὰς τὸν B κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκως ἄρα ἡ E μονὰς τὸν B ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ A τὸν Δ . Ἰσάκως δὲ ἡ E μονὰς τὸν B ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ A τὸν Γ · ἰσάκως ἄρα ὁ A ἐκάτερον τῶν Γ Δ μετρεῖ. Ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ.

Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλα- 17. σιάσας ποιῇ τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔξουσιν τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν.

Ἀριθμὸς

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A δύο ἀριθμοὺς τοὺς B Γ Fig. 17.
πολλαπλασιάσας τοὺς Δ E ποιεῖτω· λέγω ὅτι ἐστὶν
ὡς ὁ B πρὸς τὸν Γ , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E .

Ἐπεὶ γὰρ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Δ
πεποίηκεν· ὁ B ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ
 A μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Z μονὰς τὸν Δ ἀριθ-
μὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκως ἄρα ἡ Z
μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ B τὸν Δ · ἐστὶν
ἄρα ὡς ἡ Z μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ
 B πρὸς τὸν Δ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Z μονὰς
πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν E · καὶ
ὡς ἄρα ὁ B πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν E .
Ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Γ , οὕτως ὁ Δ
πρὸς τὸν E · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινὰ πολλα- 18.
πλασιάσαντες ποιῶσιν τινὰς· οἱ γενομένοι
ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔξουσι λόγον τοῖς πολ-
λαπλασιάσασιν.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A B ἀριθμὸν τινὰ τὸν Fig. 18.
 Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ E ποιεῖτωσαν· λέγω
ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E .

Ἐπεὶ γὰρ ὁ A τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ
πεποίηκε· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν
 Δ πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν B πολ-
λαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν. Ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ
δύο ἀριθμοὺς τοὺς A B παλλαπλασιάσας τοὺς Δ E
πεποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως
ὁ Δ πρὸς τὸν E · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾶσιν, 19.
ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γενομένος

ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου γενομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ $A B$ Fig. 19. $\Gamma \Delta$, ὥς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , καὶ ὁ μὲν A τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν E ποιεῖτω, ὁ δὲ B τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιεῖτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ E τῷ Z .

Ὁ γὰρ A τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν H ποιεῖτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ A τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν H πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ A δύο ἀριθμοὺς τοὺς $\Gamma \Delta$ πολλαπλασιάσας τοὺς $H E$ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὥς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν E . Ἀλλ' ὥς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B · καὶ ὥς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν E . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ A τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν H πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ B τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Z πεποίηκε· δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ $A B$ ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς $H Z$ πεποίηκασιν· ἔστιν ἄρα ὥς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Z . Ἀλλὰ μὴν καὶ ὥς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν E · καὶ ὥς ἄρα ὁ H πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Z · ὁ H ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν $E Z$ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ E τῷ Z .

Ἔστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ E τῷ Z · λέγω ὅτι ἐστὶν ὥς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ὁ A τοὺς $\Gamma \Delta$ πολλαπλασιάσας τοὺς $H E$ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὥς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν E . Ἰσος δὲ ὁ E τῷ Z · ἔστιν ἄρα ὥς ὁ H πρὸς

τὸν E , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Z . Ἀλλ' ὥς μὲν ὁ H πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ . καὶ ὥς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Z . Ὡς δὲ ὁ H πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B . καὶ ὥς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾦσιν, ὁ 20.
ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἔσται τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου
ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ
μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ A B Γ , fig. 20.
ὥς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ . λέγω
ὅτι ὁ ἐκ τῶν A Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B .

Κείσθω γὰρ τῷ B ἴσος ὁ Δ . ἔστιν ἄρα ὥς ὁ A
πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ . ὁ ἄρα ἐκ τῶν
 A Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν B Δ . Ὁ δὲ ἐκ τῶν B Δ
ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B . ἴσος γὰρ ὁ B τῷ Δ . ὁ ἄρα
ἐκ τῶν A Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B .

Ἀλλὰ δὴ ὁ ἐκ τῶν A Γ ἴσος ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ
 B . λέγω ὅτι ἐστὶν ὥς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ B
πρὸς τὸν Γ .

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκ τῶν A Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ
 B , ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ B ἴσος τῷ ὑπὸ τῶν B Δ . ἔστιν
ἄρα ὥς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ .
ἴσος δὲ ὁ B τῷ Δ . ἔστιν ἄρα ὥς ὁ A πρὸς τὸν B ,
οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κα.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐ- 21.
τὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς
τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ τε

μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα.

Ἐστώσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A B , οἱ $\Gamma\Delta$ EZ . λέγω ὅτι ἰσάκως ὁ $\Gamma\Delta$ τὸν A μετρεῖ καὶ ὁ EZ τὸν B . Fig. 21.

Ὁ $\Gamma\Delta$ γὰρ τοῦ A οὐκ ἐστὶ μέρος. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ὁ EZ ἄρα τοῦ B τὰ αὐτὰ μέρος ἐστὶν, ἅπερ ὁ $\Gamma\Delta$ τοῦ A . ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ $\Gamma\Delta$ μέρη τοῦ A , τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ EZ μέρη τοῦ B . Διηρήσθω ὁ μὲν $\Gamma\Delta$ εἰς τὰ τοῦ A μέρη τὰ ΓH $H\Delta$, ὁ δὲ EZ εἰς τὰ τοῦ B μέρη τὰ $E\Theta$ ΘZ . ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓH $H\Delta$ τῷ πλῆθει τῶν $E\Theta$ ΘZ . Καὶ ἐπεὶ ἴσοι οἱ ΓH $H\Delta$ εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ $E\Theta$ ΘZ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓH $H\Delta$ τῷ πλῆθει τῶν $E\Theta$ ΘZ . ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓH πρὸς τὸν $E\Theta$, οὕτως ὁ $H\Delta$ πρὸς τὸν ΘZ . ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἰς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἐπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓH πρὸς τὸν $E\Theta$, οὕτως ὁ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸν EZ . οἱ ΓH $E\Theta$ ἄρα τοῖς $\Gamma\Delta$ EZ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἐλάττονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἀδύνατον. ὑπόκεινται γὰρ οἱ $\Gamma\Delta$ EZ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς. οὐκ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ $\Gamma\Delta$ τοῦ A . μέρος ἄρα· καὶ ὁ EZ τοῦ B τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὁ $\Gamma\Delta$ τοῦ A . ἰσάκως ἄρα ὁ $\Gamma\Delta$ τὸν A μετρεῖ, καὶ ὁ EZ τὸν B . ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Πρότασις εβ.

Ἐὰν ᾧσι τρεῖς ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος καὶ σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἥ δὲ τετραγαμένη 22.

αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ διῴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἐστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, οἱ $A B \Gamma$, καὶ ἄλλοι Fig. 22. αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος καὶ σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ $\Delta E Z$, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὥς μὲν ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z , ὥς δὲ ὁ B πρὸς τὸν Γ , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E . λέγω ὅτι καὶ διῴσου ἐστὶν ὥς ὁ A πρὸς τὸν Γ , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z .

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὥς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . ὁ ἄρα ἐκ τῶν $A Z$ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν $B E$. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ὁ B πρὸς τὸν Γ , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E . ὁ ἄρα ἐκ τῶν $\Gamma \Delta$ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν $B E$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν $A Z$ ἴσος τῷ ἐκ τῶν $B E$. καὶ ὁ ἐκ τῶν $A Z$ ἄρα ἴσος ἐστὶν τῷ ἐκ τῶν $\Gamma \Delta$. ἐστὶν ἄρα ὥς ὁ A πρὸς τὸν Γ , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κγ'.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι εἰσὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς. 23.

Ἐστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ $A B$ Fig. 23. λέγω ὅτι οἱ $A B$ ἐλάχιστοι εἶαι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ $A B$ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· ἔσονται τινες τῶν $A B$ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς $A B$. Ἐστωσαν οἱ $\Gamma \Delta$.

Ἐπεὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκως, ὃ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττω τὸν ἐλάττωνα, τοῦτ' ἐστὶν, ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ἰσάκως ἄρα ὁ Γ

τὸν A μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν B . Ὅσακις δὴ ὁ Γ τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E . καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ E μονάδας. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ E μονάδας· καὶ ὁ E ἄρα τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ E τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ E ἄρα τοὺς A B μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἔσονται τινες τῶν A B ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἱλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς A B . Οἱ A B ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κδ.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. 24.

Ἐστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς οἱ A B λέγω ὅτι οἱ A B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Fig. 24

Εἰ γὰρ μὴ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A B , μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Γ . Καὶ ὅσακις μὲν ὁ Γ τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ , ὅσακις δὲ ὁ Γ τὸν B μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E .

Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Γ ἄρα τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Δ E πολλαπλασιάσας τοὺς A B πεποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B . οἱ Δ E ἄρα τοῖς A B ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἐλάχιστοι ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύ-

νατον. Οὐκ ἄρα τοὺς A B ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. Οἱ A B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κε.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους 25.
ὥσιν, ὁ τὸν ἓνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμός
πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Ἐστῶσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους Fig. 25.
οἱ A B , τὸν δὲ A μετρεῖτω τις ἀριθμός ὁ Γ . λέγω
ὅτι καὶ οἱ B Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ B Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους,
μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω
ὁ Δ . Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, ὁ δὲ Γ τὸν A
μετρεῖ· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν A μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ
τὸν B . ὁ Δ ἄρα τοὺς A B μετρεῖ πρῶτους ὄντας
πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοὺς
 A B ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. Οἱ Γ B ἄρα
πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κς.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινὰ ἀριθμὸν 26.
πρῶτοι ὥσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος
πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A B πρὸς τινὰ ἀριθμὸν Fig. 26.
τὸν Γ πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλα-
σιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι καὶ οἱ Γ Δ πρῶτοι
πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Γ Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους,
μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω
ὁ E . Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ A πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν,
τὸν δὲ Γ μετρεῖ τις ἀριθμός ὁ E . οἱ E A ἄρα

πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅσάκις δὲ ὁ E τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Z . καὶ ὁ Z ἄρα τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ E μονάδας· ὁ E ἄρα τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν E Z τῷ ἐκ τῶν A B . Ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον εἰσίν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν A , οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Z . Οἱ δὲ A E πρώτοι, οἱ δὲ πρώτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐταῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὃ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τοῦτ' ἐστίν, ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ὁ E ἄρα τὸν B μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ · ὁ E ἄρα τοὺς B Γ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοὺς Γ A ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει. Οἱ Γ A ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρώτασις κζ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἐσται. 27.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους Fig. 27. οἱ A B , καὶ ὁ A αὐτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Γ B πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Κείσθω γὰρ τῷ A ἴσος ὁ Δ . Καὶ ἐπεὶ οἱ A B πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἴσος δὲ ὁ A τῷ Δ · καὶ οἱ Δ B ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἐκάτερος ἄρα τῶν Δ A πρὸς τὸν B πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ ἐκ τῶν Δ A ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν B πρῶτος ἐσται. Ὁ δὲ ἐκ τῶν A Δ γενόμενος ἀριθμὸς ἐστίν ὁ Γ .

Οἱ Γ B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει
δειῖσαι.

Πρώταις κή.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμούς, 28.
ἀμφοτέρω πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ᾧσι· καὶ
οἱ ἐξ αὐτῶν γεγόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλή-
λους ἔσονται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A B πρὸς δύο ἀριθμούς Fig. 28.
τοὺς Γ Δ , ἀμφοτέρω πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ἔστω-
σαν, καὶ ὁ μὲν A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν E
ποιεῖτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποι-
εῖτω· λέγω ὅτι οἱ E Z πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν A B πρὸς τὸν Γ πρῶ-
τός ἐστι, καὶ ὁ ἐκ τῶν A B ἄρα γεγόμενος πρὸς
τὸν Γ πρῶτος ἔσται. Ὁ δὲ ἐκ τῶν A B γεγόμενός
ἐστίν ὁ E · οἱ E Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.
Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ E Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους
εἰσίν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Γ Δ πρὸς τὸν E πρῶτός
ἐστι. καὶ ὁ ἐκ τῶν Γ Δ ἄρα γεγόμενος πρὸς τὸν E
πρῶτος ἔσται. Ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ Δ γεγόμενός ἐστίν ὁ Z .
Οἱ E Z ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει
δειῖσαι.

Πρώταις κθ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλή- 29.
λους ᾧσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος
ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γεγόμενοι ἐξ αὐτῶν
πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ ἐὰν οἱ
ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαν-
τες ποιῶσιν τινας, καὶ ἐκεῖνοι πρῶτοι πρὸς
ἀλλήλους ἔσονται καὶ αἰεὶ περὶ τοὺς ἄκρους
τοῦτα συμβαίνει.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους Fig. 29 οἱ $A B$, καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν E ποιεῖτω, ὁ δὲ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιεῖτω· λέγω ὅτι οἱ τε ΓE καὶ οἱ ΔZ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ $A B$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ ΓB ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Ἐπεὶ οὖν οἱ ΓB πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, οἱ $\Gamma \Delta$ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ $A B$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· οἱ $A \Delta$ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ $A \Gamma$ πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς $B \Delta$ ἀμφοτέρω πρὸς ἑκάτερον πρῶτοί εἰσι· καὶ ὁ ἐκ τῶν $A \Gamma$ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν $B \Delta$ πρῶτός ἐστι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν $A \Gamma$ ὁ E , ὁ δὲ ἐκ τῶν $B \Delta$ ὁ Z . Οἱ $E Z$ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾶσι, καὶ συναμφοτέρος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται· καὶ ἐὰν συναμφοτέρος πρὸς ἓνα τινὰ αὐτῶν πρῶτος ᾖ, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται. 30.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς Fig. 30. ἀλλήλους οἱ $AB B\Gamma$ · λέγω ὅτι καὶ συναμφοτέρος ὁ $A\Gamma$ πρὸς ἑκάτερον τῶν $AB B\Gamma$ πρῶτός ἐστιν

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ $\Gamma A AB$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρεῖτω, καὶ

ἔστω ὁ Δ . Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τοὺς $\Gamma\Lambda$ AB μετρεῖ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν $B\Gamma$ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν BA . ὁ Δ ἄρα τοὺς AB $B\Gamma$ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς $\Gamma\Lambda$ AB ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει· οἱ $\Gamma\Lambda$ AB ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ $\Lambda\Gamma$ ΓB πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ὁ $\Gamma\Lambda$ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν AB $B\Gamma$ πρώτός ἐστιν.

Ἔστωσαν δὴ πάλιν οἱ $\Gamma\Lambda$ AB πρώτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι καὶ οἱ AB $B\Gamma$ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ AB $B\Gamma$ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους· μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Δ . Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν AB $B\Gamma$ μετρεῖ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν $\Gamma\Lambda$ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν AB . ὁ Δ ἄρα τοὺς $\Gamma\Lambda$ AB μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοὺς AB $B\Gamma$ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει. Οἱ AB $B\Gamma$ ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ια.

Ἄπας πρώτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα 31. ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρώτός ἐστιν.

Ἔστω πρώτος ἀριθμὸς ὁ A , καὶ τὸν B μὴ με- Fig. 31.
τρεῖτω· λέγω ὅτι οἱ B A πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ B A πρώτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Γ . Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν B μετρεῖ, ὁ δὲ A τὸν B οὐ μετρεῖ· ὁ Γ ἄρα τῷ A οὐκ ἐστὶν ὁ αὐτός. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τοὺς B A μετρεῖ· καὶ τὸν A ἄρα μετρεῖ πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοὺς B A μετρήσει τις ἀριθμὸς.

Οἱ A B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιβ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες 32.
ἀλλήλους ποιῶσιν τινὰ, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ
αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμὸς· καὶ ἓνα
τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A B πολλαπλασιάσαντες Fig. 32.
ἀλλήλους τὸν Γ ποιείτωσαν, τὸν δὲ Γ μετρεῖτω τις
πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Δ · λέγω ὅτι ὁ Δ ἓνα τῶν A B
μετρεῖ.

Τὸν γὰρ A μὴ μετρεῖτω· καὶ ἔστι πρῶτος ὁ Δ ·
οἱ A Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· καὶ ὅσάκις
ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ
 E . Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ E
μονάδας, ὁ Δ ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν Γ
πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιά-
σας τὸν Γ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ E
τῷ ἐκ τῶν A B · ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν A , οὕ-
τως ὁ B πρὸς τὸν E . Οἱ δὲ Δ A πρῶτοι, οἱ δὲ
πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι
τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ἃ τε μείζων
τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τοῦτ'
ἐστὶν ὁ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπό-
μενος τὸν ἐπόμενον· ὁ Δ ἄρα τὸν B μετρεῖ. Ὁμοίως
δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ὁ Δ τὸν B μὴ μετρῇ, τὸν
 A μετρήσει. Ὁ Δ ἄρα ἓνα τῶν A B μετρεῖ· ὅπερ
ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ.

Ἄπας σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρῶτου τι- 33.
νὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ A . λέγω ὅτι ὁ A Fig. 33.
ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ A , μετρήσει τις αὐ-
τὸν ἀριθμός. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ B . Καὶ εἴ-
μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ B , δῆλον ἂν εἶη τὸ ζητούμενον·
εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Με-
τρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Γ . Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν B μετρεῖ,
ὁ δὲ B τὸν A μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν A μετρεῖ.
Καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ , δῆλον ἂν εἶη τὸ ζη-
τούμενον· εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθ-
μός. Τοιαύτης δὴ γενομένης ἐπισκέψεως ληφθήσε-
ταί τις πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἐαυ-
τοῦ, ὃς καὶ τὸν A μετρήσει. Εἰ γὰρ μὴ ληφθήσεται·
μετρήσουσι τὸν A ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοὶ, ὧν ὁ
ἕτερος τοῦ ἑτέρου ἐλάσσων ἐστίν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνα-
τον ἐν ἀριθμοῖς. Ληφθήσεταιί τις ἄρα πρῶτος ἀριθ-
μός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἐαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν A με-
τρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις 18.

Ἄπας ἀριθμὸς ἥτοι πρῶτός ἐστίν, ἢ 34.
ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐστω ἀριθμὸς ὁ A . λέγω ὅτι ὁ A ἥτοι πρῶ- Fig. 34.
τός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ A , δῆλον ἂν εἶη τὸ
ζητούμενον· εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν
πρῶτος ἀριθμός.

Ἄπας ἄρα ἀριθμὸς ἥτοι πρῶτός ἐστίν ἢ ὑπὸ
πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις 19.

Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν εὗρεῖν 35.
τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχον-
των αὐτοῖς.

Ἐστῶσαν οἱ δοθέντες ὅποιοι ἄριθμοι, οἱ A Fig. 35. B Γ . δεῖ δὴ εὐρεῖν τοὺς ἐλάχιστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A B Γ .

Οἱ A B Γ ἦτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν, ἢ οὐ. Εἰ μὲν οὖν οἱ A B Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Εἰ δὲ οὐ. εἰλήφθω τῶν A B Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον Δ , καὶ ὅσάκις Δ ἕκαστον τῶν A B Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν ἑκάστῳ τῶν E Z H . καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν E Z H ἕκαστον τῶν A B Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· οἱ E Z H ἄρα τοὺς A B Γ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ E Z H ἄρα τοῖς A B Γ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ E Z H ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A B Γ , ἔσονται τινες τῶν E Z H ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς A B Γ . Ἐστῶσαν οἱ Θ K Λ . ἰσάκις ἄρα Θ τὸν A μετρεῖ καὶ ἑκάτερος τῶν K Λ ἑκάτερον τῶν B Γ . Ὅσάκις δὲ Θ τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ M . καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν K Λ ἑκάτερον τῶν B Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ M μονάδας. Καὶ ἐπεὶ Θ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ M μονάδας· καὶ M ἄρα τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Θ μονάδας. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ M ἑκάτερον τῶν B Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν K Λ μονάδας· M ἄρα τοὺς A B Γ μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ Θ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ M μονάδας· Θ ἄρα τὸν M πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ E τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν Θ ἐκ τῶν E Δ τῷ ἐκ τῶν Θ M . ἐστὶν ἄρα ὡς Θ πρὸς τὸν E , οὕτως M πρὸς τὸν Δ . Μείζων δὲ Θ τοῦ E · μείζων ἄρα καὶ M τοῦ Δ , καὶ

μετρεῖ τοὺς $A B \Gamma$, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὑπόκειται γὰρ ὁ Δ τῶν $A B \Gamma$ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον· οὐκ ἄρα ἔσονται τινες τῶν $E Z H$ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς $A B \Gamma$. Οἱ $E Z H$ ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς $A B \Gamma$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιε'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὐρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν. 36.

Ἐστώσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ $A B$ · δεῖ Fig. 36. δὴ εὐρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν,

Οἱ $A B$ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν, ἢ οὐ. Ἐστώσαν πρότερον οἱ $A B$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ B ἄρα τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ $A B$ ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ μετρήσουσί τινα ἀριθμόν οἱ $A B$ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ . Μετρείτωσαν τὸν Δ . Καὶ ὅσάκις ὁ A τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E · ὅσάκις δὲ ὁ B τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Z · ὁ μὲν A ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ B τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν $A E$ τῷ ἐκ τῶν $B Z$ · ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν E . Οἱ δὲ $A B$ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ B ἄρα τὸν E μετρεῖ, ὡς ἐπόμενος ἐπόμενον. Καὶ ἐπεὶ ὁ A τοὺς $B E$ πολλαπλασιάσας τοὺς $\Gamma \Delta$ πεποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ B πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ · μετρεῖ δὲ ὁ B τὸν E · μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ , ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύ-

νατον. Οὐκ ἄρα οἱ $A B$ μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ (ὅταν οἱ $A B$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν)· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν $A B$ μετρεῖται.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ $A B$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς $A B$, οἱ $Z E$. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν $A E$ τῷ ἐκ τῶν $B Z$. Καὶ ὁ A τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ B ἄρα τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ $A B$ ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἴ γὰρ μή· μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ $A B$ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ . Μετρεῖτωσαν τὸν Δ . Καὶ ὡσάκις μὲν ὁ A τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ H , ὡσάκις δὲ ὁ B τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Θ . ὁ μὲν A ἄρα τὸν H πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ B τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν $A H$ τῷ ἐκ τῶν $B \Theta$. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν H . Ὡς δὲ ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν E . καὶ ὡς ἄρα ὁ Z πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν H . Οἱ δὲ $Z E$ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὃ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ E ἄρα τὸν H μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ A τοὺς $E H$ πολλαπλασιάσας τοὺς $\Gamma \Delta$ πεποίηκεν ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν H , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ . Ὁ δὲ E τὸν H μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὃ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ $A B$ μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα τοῦ Γ . Ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν $A B$ μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρὸς

Πρότασις λγ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινα μετρώ- 37.
σι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος
τὸν αὐτὸν μετρήσει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A B ἀριθμὸν τινα τὸν Fig. 37.
 $\Gamma\Delta$ μετρεῖτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν E · λέγω ὅτι καὶ
ὁ E τὸν $\Gamma\Delta$ μετρεῖ.

Εἰ γὰρ μὴ μετρεῖ ὁ E τὸν $\Gamma\Delta$, ὁ E τὸν $Z\Delta$
μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΓZ . Καὶ ἐπεὶ
οἱ A B τὸν E μετροῦσιν, ὁ δὲ E τὸν ΔZ μετρεῖ·
καὶ οἱ A B ἄρα τὸν ΔZ μετρήσουσι. Μετροῦσι δὲ
καὶ ὅλον τὸν $\Gamma\Delta$ · καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓZ μετρή-
σουσιν, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ E , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
Οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ E τὸν $\Gamma\Delta$ · μετρεῖ ἄρα· ὅπερ
ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λδ.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν 38.
ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμὸν.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ A B Γ · δεῖ Fig. 38.
δὴ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμὸν.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ δύο τῶν A B ἐλάχιστος με-
τρούμενος ὁ Δ . Ὁ δὲ Γ τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ με-
τρεῖ. Μετρεῖτω πρότερον. Μετροῦσι δὲ καὶ οἱ A
 B τὸν Δ · οἱ A B Γ ἄρα τὸν Δ μετρήσουσι. Λέγω
ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ· μετρήσουσιν τινα
ἀριθμὸν οἱ A B Γ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ . Μετρεῖ-
τωσαν τὸν E . Ἐπεὶ οὖν οἱ A B Γ τὸν E μετροῦ-
σι, καὶ οἱ A B ἄρα τὸν E μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχι-
στος ἄρα ὑπὸ τῶν A B μετρούμενος τὸν E μετρήσει.
Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν A B μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ
ὁ Δ ἄρα τὸν E μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ
ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα οἱ A B Γ μετρήσουσιν τινα

ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ . οἱ $A B \Gamma$ ἄρα ἐλάχιστον τὸν Δ μετροῦσι.

Μὴ μετρεῖτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ , καὶ εἰλήφθω ὁ ὑπὸ τῶν $\Gamma \Delta$ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ E . Ἐπεὶ οὖν οἱ $A B$ τὸν Δ μετροῦσιν, ὁ δὲ Δ τὸν E μετρεῖ· καὶ οἱ $A B$ ἄρα τὸν E μετροῦσι. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν E · καὶ οἱ $A B \Gamma$ ἄρα τὸν E μετροῦσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα οἱ $A B \Gamma$, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ E . Μετρεῖτωσαν τὸν Z . Καὶ ἐπεὶ οἱ $A B \Gamma$ τὸν Z μετροῦσι· καὶ οἱ $A B$ ἄρα τὸν Z μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν $A B$ μετρούμενος τὸν Z μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν $A B$ μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ · ὁ Δ ἄρα τὸν Z μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Z · οἱ $\Delta \Gamma$ ἄρα τὸν Z μετροῦσιν· ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν $\Delta \Gamma$ μετρούμενος τὸν Z μετρήσει. Ὁ δὲ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν $\Delta \Gamma$ μετρούμενός ἐστιν ὁ E · ὁ E ἄρα τὸν Z μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα οἱ $A B \Gamma$ μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ E . Ὁ E ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν $A B \Gamma$ μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις 18.

Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπὸ τίνος ἀριθμοῦ μετρηῖται ὁ μετρούμενος ὁμώνυμον μέρος ἔξει τῷ μετροῦντι. 39.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A ὑπὸ τίνος ἀριθμοῦ τοῦ B Fig. 39. μετρεῖσθω· λέγω ὅτι ὁ A ὁμώνυμον μέρος ἔχει τῷ B .

Ὅσάκις γὰρ ὁ B τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Γ · καὶ ἐπεὶ ὁ B τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ B

τὸν A . ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἢ A μονὰς τὸν B ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν A . ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἢ A μονὰς τοῦ B ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ A . Ἡ δὲ A μονὰς τοῦ B ἀριθμοῦ μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον αὐτῷ. καὶ ὁ Γ ἄρα τοῦ A μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ B . Ὡστε ὁ A μέρος ἔχει τὸν Γ ὁμώνυμον ὄντα τῷ B . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μ.

Ἐὰν ἀριθμὸς μέρος ἔχη ὀτιοῦν. ὑπὸ 40.
ὁμώνυμον ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A μέρος ἔχτω ὀτιοῦν τὸν B , καὶ τῷ B μέρει ὁμώνυμος ἔστω ἀριθμὸς ὁ Γ . λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν A μετρεῖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ B τοῦ A μέρος ἐστὶ καὶ ὁμώνυμον τῷ Γ , ἐστὶ δὲ καὶ ἢ A μονὰς τοῦ Γ μέρος ὁμώνυμον αὐτῷ. ὃ μέρος ἄρα ἐστὶν ἢ A μονὰς τοῦ Γ ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ B τοῦ A . ἰσάκεις ἄρα ἢ A μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ B τὸν A . ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἢ A μονὰς τὸν B ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ Γ τὸν A . Ὁ Γ ἄρα τὸν A μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μα.

Ἀριθμὸν εὐρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἔξει 41.
τὰ δοθέντα μέρη.

Ἐστω τὰ δοθέντα μέρη τὰ $A B \Gamma$. δεῖ δὴ
ἀριθμὸν εὐρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἔξει τὰ $A B \Gamma$
μέρη.

Ἐστωσαν τοῖς $A B \Gamma$ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί, οἱ $\Delta E Z$, καὶ εἰλήφθω ὁ ὑπὸ τῶν $\Delta E Z$ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ H .

Ἐπεὶ οὖν ὁ H ὑπὸ τῶν $\Delta E Z$ μετρεῖται. ὁ H ἄρα ὁμώνυμα μέρη ἔχει τοῖς $\Delta E Z$. Τοῖς δὲ $\Delta E Z$ ὁμώνυμα

μέρη ἐστὶ τὰ $A B \Gamma$. ὁ H ἄρα ἔχει τὰ $A B \Gamma$ μέρη. Λέγω δὴ ὅτι ἐλάχιστος ὢν. Εἰ γὰρ μὴ ὁ H ἐλάχιστος ὢν ἔχει τὰ $A B \Gamma$ μέρη· ἔσται τις τοῦ H ἐλάσσων ἀριθμὸς, ὃς ἔξει τὰ $A B \Gamma$ μέρη. Ἐστὼ ὁ Θ . καὶ ἐπεὶ ὁ Θ ἔχει τὰ $A B \Gamma$ μέρη· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ ὁμωνύμων ἀριθμῶν μετρηθήσεται τοῖς $A B \Gamma$ μέρεσι. Τοῖς δὲ $A B \Gamma$ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί εἰσιν οἱ $\Delta E Z$. ὁ Θ ἄρα ὑπὸ τῶν $\Delta E Z$ μετρεῖται, καὶ ἔστιν ἐλάσσων τοῦ H . ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἔσται τις τοῦ H ἐλάσσων ἀριθμὸς, ὃς ἔξει τὰ $A B \Gamma$ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ ἑβδόμου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΟΓΔΩΔΕΚΑΤΟΝ.

Πρώταις *

Ἐάν ὧσιν ὅσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς 1.
ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς
ἀλλήλους ὧσιν· ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐ-
τὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Ἐστῶσαν ὅποιοιῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Fig. 1.
 $A B \Gamma \Delta$, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν, οἱ $A \Delta$, πρῶτοι πρὸς
ἀλλήλους ἔσῳσαν· λέγω ὅτι οἱ $A B \Gamma \Delta$ ἐλάχιστοί
εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Εἰ γὰρ μὴ· ἔσῳσαν ἐλάττωες τῶν $A B \Gamma \Delta$
οἱ $E Z H \Theta$ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς. Καὶ
ἐπεὶ οἱ $A B \Gamma \Delta$ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς $E Z$
 $H \Theta$, καὶ ἐστὶν ἴσον τὰ πλῆθος τῶν $A B \Gamma \Delta$ τῷ
πλήθει τῶν $E Z H \Theta$ · διῶσον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ A
πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Θ . Οἱ δὲ $A \Delta$
πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι
ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσά-
κως, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν
ἐλάσσονα, τοῦτ' ἐστὶν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον,
καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ A τὸν
 E , ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον·
οὐκ ἄρα οἱ $E Z H \Theta$ ἐλάσσονες ὄντες τῶν $A B \Gamma$
 Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς· οἱ $A B \Gamma \Delta$ ἄρα
ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β.

Ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἐξῆς ἀνάλογον ἐλα- 2.
χίστους, ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῷ δο-
θέντι λόγῳ.

Ἐστω ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίσταις ἀριθμοῖς *Fig. 2.*
ὁ τοῦ *A* πρὸς τὸν *B*. δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἐξῆς
ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῷ
τοῦ *A* πρὸς τὸν *B* λόγῳ.

Ἐπιτετάχθωσαν δὴ τέσσαρες, καὶ ὁ *A* ἑαυτὸν
πολλαπλασιάσας τὸν *Γ* ποιέτω· τὸν δὲ *B* πολλαπλα-
σιάσας τὸν *Δ* ποιέτω, καὶ ἔτι ὁ *B* ἑαυτὸν πολλα-
πλασιάσας τὸν *Ε* ποιέτω, καὶ ἔτι ὁ *A* τοὺς *Γ Δ Ε*
πολλαπλασιάσας τοὺς *Ζ Η Θ* ποιέτω, ὁ δὲ *B* τὸν
Ε πολλαπλασιάσας τὸν *Κ* ποιέτω.

Καὶ ἐπεὶ ὁ *A* ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν
Γ πεποίηκε, τὸν δὲ *B* πολλαπλασιάσας τὸν *Δ* πε-
ποίηκεν, ἀριθμὸς δὴ ὁ *A* δύο τοὺς *A B* πολλαπλα-
σιάσας τοὺς *Γ Δ* πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ *A* πρὸς
τὸν *B*, οὕτως ὁ *Γ* πρὸς τὸν *Δ*. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ *A*
τὸν *B* πολλαπλασιάσας τὸν *Δ* πεποίηκεν, ὁ δὲ *B*
ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν *Ε* πεποίηκεν· ἑκάτερος
ἄρα τῶν *A B* τὸν *B* πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν
Δ Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ *A* πρὸς τὸν *B*, οὕ-
τως ὁ *A* πρὸς τὸν *Ε*. Ἀλλ' ὡς ὁ *A* πρὸς τὸν *B*,
οὕτως ὁ *Γ* πρὸς τὸν *Δ*· καὶ ὡς ἄρα ὁ *Γ* πρὸς τὸν
Δ, οὕτως ὁ *Δ* πρὸς τὸν *Ε*. Καὶ ἐπεὶ ὁ *A* τοὺς *Γ*
Δ πολλαπλασιάσας τοὺς *Ζ Η* πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα
ὡς ὁ *Γ* πρὸς τὸν *Δ*, οὕτως ὁ *Ζ* πρὸς τὸν *Η*. Ὡς
δὲ ὁ *Γ* πρὸς τὸν *Δ*, οὕτως ἦν ὁ *A* πρὸς τὸν *B*· καὶ
ὡς ἄρα ὁ *A* πρὸς τὸν *B*, οὕτως ὁ *Ζ* πρὸς τὸν *Η*.
Πάλιν, ἐπεὶ ὁ *A* τοὺς *Δ Ε* πολλαπλασιάσας τοὺς
Η Θ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ *Δ* πρὸς τὸν *Ε*, οὕ-
τως ὁ *Η* πρὸς τὸν *Θ*. Ὡς δὲ ὁ *Δ* πρὸς τὸν *Ε*, οὕ-

τως ὁ A πρὸς τὸν B . καὶ ὥς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Θ . Καὶ ἐπεὶ οἱ $A B$ τὸν E πολλαπλασιάσαντες τοὺς ΘK πεποίηκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν K . Ἀλλ' ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ τε Z πρὸς τὸν H , καὶ ὁ H πρὸς τὸν Θ . καὶ ὡς ἄρα ὁ Z πρὸς τὸν H , οὕτως ὁ τε H πρὸς τὸν Θ , καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν K . οἱ $\Gamma \Delta E$ ἄρα καὶ οἱ $Z H \Theta K$ ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ A πρὸς τὸν B λόγῳ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ $A B$ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. οἱ $A B$ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Καὶ ἐκάτερος μὲν τῶν $A B$ ἐαυτὸν πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν ΓE πεποίηκεν, ἐκάτερον δὲ τῶν ΓE πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν $Z K$ πεποίηκεν· οἱ ΓE ἄρα καὶ οἱ $Z K$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐὰν δὲ ᾧσιν ὅποσοιῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν· ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ $\Gamma \Delta E$ ἄρα καὶ οἱ $Z H \Theta K$ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς $A B$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ᾧσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν· ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

Πρότασις γ'.

Ἐὰν ᾧσιν ὅποσοιῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. 3.

Ἐστῶσαν ὁποσοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον; Fig. 3.
ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς, οἱ A
 B Γ Δ . λέγω ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ A Δ πρῶτοι
πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν
τῷ τῶν A B Γ Δ λόγῳ, οἱ E Z , τρεῖς δὲ οἱ H Θ
 K , καὶ αὖτις ἐξῆς ἐν πλείους, ἕως ἂν τὸ λαμβανόμε-
τον πλῆθος ἴσου γένηται τῷ πλήθει τῶν A B Γ Δ .
Εἰλήφθωσαν, καὶ ἕστωσαν οἱ A M N Ξ .

Καὶ ἐπεὶ οἱ E Z ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν
λόγον ἔχοντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.
Καὶ ἐπεὶ ἐκάτερος τῶν E Z ἑαυτὸν μὲν πολλαπλα-
σιάσας ἐκάτερον τῶν H K πεποίηκεν, ἐκάτερον δὲ
τῶν H K πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν A Ξ πε-
ποίηκεν. οἱ H K ἄρα καὶ οἱ A Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλ-
λήλους εἰσίν. Καὶ ἐπεὶ οἱ A B Γ Δ ἐλάχιστοί εἰσι
τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ
 A M N Ξ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς A
 B Γ Δ , καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν A B Γ Δ
τῷ πλήθει τῶν A M N Ξ . ἕκαστος ἄρα τῶν A B
 Γ Δ ἐκάστῳ τῶν A M N Ξ ἴσος ἐστίν. ἴσος ἄρα
ἐστὶν ὁ μὲν A τῷ A , ὁ δὲ Δ τῷ Ξ . Καὶ ἐπεὶ οἱ A
 Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἴσος δὲ ὁ μὲν A τῷ
 A , ὁ δὲ Z τῷ Δ . καὶ οἱ A Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλ-
λήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις δ.

Λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίσ- 4.
τοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἐξῆς ἐλα-
χίστους ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθ- Fig. 4.
μοῖς, ὅ τε τοῦ A πρὸς τὸν B , καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς
τὸν Δ , καὶ ἔτι ὁ τοῦ E πρὸς τὸν Z . δεῖ δὴ ἀριθ-
μοὺς εὐρεῖν ἐξῆς ἐλαχίστους, ἐν τε τῷ τοῦ A πρὸς

τὸν B λόγῳ, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ , καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ E πρὸς τὸν Z .

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν B Γ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ H . Καὶ ὅσάκις μὲν ὁ B τὸν H μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ A τὸν Θ μετρεῖτω, ὅσάκις δὲ ὁ Γ τὸν H μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Δ τὸν K μετρεῖτω, ὁ δὲ E τὸν K ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖτω πρότερον. Καὶ ὅσάκις ὁ E τὸν K μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Z τὸν Λ μετρεῖτω. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ A τὸν Θ μετρεῖ, καὶ ὁ B τὸν H , ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν H . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν K , καὶ ἔτι ὡς ὁ E πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ K πρὸς τὸν Λ . οἱ Θ H K Λ ἄρα ἐξῆς εἶσιν ἐν τε τῷ τοῦ A πρὸς τὸν B , καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ , καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ E πρὸς τὸν Z λόγῳ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Θ H K Λ ἐξῆς ἐλάχιστοι, ἐν τε τοῖς τοῦ A πρὸς τὸν B , καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ , καὶ ἔτι τοῦ E πρὸς τὸν Z λόγοις, ἔσονται τινες τῶν Θ H K Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τε τοῖς τοῦ A πρὸς τὸν B , καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ , καὶ ἔτι τοῦ E πρὸς τὸν Z λόγοις. Ἐστωσαν οἱ N Ξ M O . Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ N πρὸς τὸν Ξ , οἱ δὲ A B ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦναι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὃ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, ταῦτ' ἔστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον. ὁ B ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ξ μετρεῖ. οἱ B Γ ἄρα τὸν Ξ μετροῦσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν B Γ μετρούμενος τὸν Ξ μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν A Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ H . ὁ H ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσονται τινες τῶν Θ H K Λ

ελάχιστους ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐν τε τῷ τοῦ A πρὸς τὸν B , καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ , καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ E πρὸς τὸν Z λόγῳ.

Μὴ μετρεῖτω δὴ ὁ E τὸν K . Καὶ εἰλήφθω ὁ ὑπὸ τῶν E K ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ M . Καὶ ὅσάκις μὲν ὁ K τὸν M μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ H ἑκάτερον τῶν N Ξ μετρεῖτω, ὅσάκις δὲ ὁ E τὸν M μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Z τὸν O μετρεῖτω. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Θ τὸν N μετρεῖ καὶ ὁ H τὸν Ξ . ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν H , οὕτως ὁ N πρὸς τὸν Ξ . Ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν H , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B . καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ N πρὸς τὸν Ξ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν M . Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ὁ E τὸν M μετρεῖ, καὶ ὁ Z τὸν O , ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ M πρὸς τὸν O . οἱ N Ξ M O ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε A πρὸς τὸν B , καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ , καὶ ἔτι τοῦ E πρὸς τὸν Z λόγοις. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ N Ξ M O ἐξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς A B Γ Δ E Z λόγοις. ἔσονται τινες τῶν N Ξ M O ἐλάττωτες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐν τοῖς A B Γ Δ E Z λόγοις. Ἐστῶσαν οἱ Π P Σ T . Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Π πρὸς τὸν P , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B , οἱ δὲ A B ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον. ὁ B ἄρα τὸν P μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν P μετρεῖ. οἱ B Γ ἄρα τὸν P μετροῦσι. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν B Γ μετρούμενος τὸν P μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν B Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ H . ὁ H ἄρα τὸν P μετρεῖ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ H πρὸς τὸν P , οὕτως ὁ K πρὸς τὸν Σ . καὶ ὁ K ἄρα τὸν Σ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ E τὸν Σ . οἱ E K ἄρα

τὸν Σ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν $E K$ μετρούμενος τὸν Σ μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν $E K$ μετρουμένός ἐστιν ὁ M . ὁ M ἄρα τὸν Σ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονται τινες τῶν $N \Xi M O$ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐν τε τοῖς τοῦ A πρὸς τὸν B καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι τοῦ E πρὸς τὸν Z λόγοις· οἱ $N \Xi M O$ ἄρα ἐξῆς ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς $A B \Gamma \Delta E Z$ λόγοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. 5.

Ἐστωσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ $A B$ καὶ τοῦ Fig. 5.
 μὲν A πλευρὰ ἔστωσαν οἱ $\Gamma \Delta$ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ B οἱ $E Z$. λέγω ὅτι ὁ A πρὸς τὸν B λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Λόγων γὰρ δοθέντων, τοῦ τε ὃν ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν E καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Z , εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς $\Gamma E \Delta Z$ λόγοις, οἱ $H \Theta K$, ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν Γ πρὸς τὸν E , οὕτως τὸν H πρὸς τὸν Θ , ὡς δὲ τὸν Δ πρὸς τὸν Z , οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν K . Καὶ ὁ Δ τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω.

Οἱ ἄρα $H \Theta K$ πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι τοὺς τῶν πλευρῶν λόγους. Ἀλλ' ὁ τοῦ H πρὸς τὸν K λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ H πρὸς τὸν Θ καὶ τοῦ τοῦ Θ πρὸς τὸν K . ὁ H ἄρα πρὸς τὸν K λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Δ . Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Θ · καὶ ὡς ἄρα ὁ H πρὸς τὸν Θ , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Δ . Πάλιν,

ἐπεὶ ὁ E τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B . Ἀλλ' ὡς ὁ A πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν K · καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν K , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B . Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ H πρὸς τὸν Θ , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν A · διῶσου ἄρα ἔστιν ὡς ὁ H πρὸς τὸν K , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B . Ὁ δὲ H πρὸς τὸν K λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε΄.

Ἐὰν ὧσιν ἀποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. 6.

Ἐστωσαν ἀποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ $A B \Gamma \Delta E$, ὁ δὲ A τὸν B μὴ μετρεῖτω· λέγω ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. Fig. 6.

Ὅτι μὲν αὖν οἱ $A B \Gamma \Delta E$ ἐξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσι, φανερόν· οὐδὲ γὰρ ὁ A τὸν B μετρεῖ. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. Εἰ γὰρ δυνατόν· μετρεῖτω ὁ A τὸν Γ . Καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ $A B \Gamma$ τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων τοῖς $A B \Gamma$ οἱ $Z H \Theta$. Καὶ ἐπεὶ αἱ $Z H \Theta$ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς $A B \Gamma$, καὶ ἔστιν ἴσον τὰ πλήθος τῶν $A B \Gamma$ τῷ πλήθει τῶν $Z H \Theta$ · διῶσου ἄρα ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ , οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ . Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H , οὐ μετρεῖ δὲ ὁ A τὸν B , οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ Z τὸν H · οὐκ ἄρα μονὰς ἔστιν ὁ Z , ἡ γὰρ μονὰς πάντα ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ εἰσιν οἱ $Z \Theta$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· οὐδὲ ὁ Z ἄρα τὸν Θ μετρεῖ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Z πρὸς

τὸν Θ . οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Γ . οὐδὲ ὁ A ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδείς οὐδένα μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ.

Ἐὰν ὧσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ· καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει. 7.

Ἐστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ *Fig. 7.*
 $A B \Gamma \Delta$, ὁ δὲ A τὸν Δ μετρεῖτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ A τὸν B μετρεῖ,

Εἰ γὰρ μὴ μετρεῖ ὁ A τὸν B , οὐδὲ ἄλλος οὐδείς οὐδένα μετρήσει. ὅπερ ἄτοπον. ὑπόκειται γὰρ ὁ A τὸν Δ μετρῶν· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ A τὸν B . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοὶ· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. 8.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν $A B$ μεταξὺ κατὰ τὸ *Fig. 8.*
συνεχές ἀνάλογον ἐμπίπτέτωσαν ἀριθμοὶ, οἱ $\Gamma \Delta$, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς $A B$ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς $E Z$ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ὅσοι γὰρ εἰσι τῷ πλήθει οἱ $A \Gamma \Delta B$, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς $A \Gamma \Delta B$, οἱ $H \Theta K A$. οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ $H A$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους

εἰσί. Καὶ ἐπεὶ οἱ $A \Gamma \Delta B$ τοῖς $H \Theta K \Lambda$ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν $A \Gamma \Delta B$ τῷ πλῆθει τῶν $H \Theta K \Lambda$. διῷσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Λ . Ὡς δὲ ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . καὶ ὡς ἄρα ὁ H πρὸς τὸν Λ , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . Οἱ δὲ $H \Lambda$ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκως, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα. τοῦτ' ἐστὶν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον. Ἰσάκως ἄρα ὁ H τὸν E μετρεῖ, καὶ ὁ Λ τὸν Z . ὁσάκως δὴ ὁ H τὸν E μετρεῖ, τοσαυτάκως καὶ ἑκάτερος τῶν ΘK ἑκάτερον τῶν $M N$ μετρεῖτω. οἱ $H \Theta K \Lambda$ ἄρα τοὺς $E M N Z$ ἰσάκως μετροῦσιν. οἱ $H \Theta K \Lambda$ ἄρα τοῖς $E M N Z$ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Ἀλλὰ οἱ $H \Theta K \Lambda$ τοῖς $A \Gamma \Delta B$ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. καὶ οἱ $A \Gamma \Delta B$ ἄρα τοῖς $E M N Z$ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Οἱ δὲ $A \Gamma \Delta B$ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι καὶ οἱ $E M N Z$ ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς $A B$ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπεπτῶκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς $E Z$ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί. ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

9.

Ἐστῶσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, Fig. 9. οἱ $A B$, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξύ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπίπτέτωσαν οἱ $\Gamma \Delta$ καὶ ἐκκείσθω ἡ E μονάς· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς $A B$ μεταξύ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἐκατέρου τῶν $A B$ καὶ τῆς μονάδος μεταξύ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν $A \Gamma \Delta B$ λόγῳ ὄντες, οἱ $Z H$, τρεῖς δὲ οἱ $\Theta K \Lambda$, καὶ αἰεὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείους, ἕως ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλήθει τῶν $A \Gamma \Delta B$. Εἰλήφθωσαν, καὶ ἕστῶσαν οἱ $M N \Xi O$. Φανερόν δὴ ὅτι ὁ μὲν Z ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκε, τὸν δὲ Θ πολλαπλασιάσας τὸν M πεποίηκε, καὶ ὁ H ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκε, τὸν δὲ Λ πολλαπλασιάσας τὸν O πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ οἱ $M N \Xi O$ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων τοῖς $Z H$, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ $A \Gamma \Delta B$ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων τοῖς $Z H$, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν $M N \Xi O$ τῷ πλήθει τῶν $A \Gamma \Delta B$. ἕκαστος ἄρα τῶν $M N \Xi O$ ἐκάστη τῶν $A \Gamma \Delta B$ ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν M τῷ A , ὁ δὲ O τῷ B , Καὶ ἐπεὶ ὁ Z ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν· ὁ Z ἄρα τὸν Θ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Z μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ E μονὰς τὸν Z κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκως ἄρα ἡ E μονὰς τὸν Z ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Z τὸν Θ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Z τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν M πεποίηκεν· ὁ Θ ἄρα τὸν M μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Z μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ E μονὰς τὸν Z ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκως ἄρα ἡ E μονὰς τὸν Z ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ Θ τὸν M · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν,

οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν M . Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ καὶ ὡς ἄρα ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ , καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν M . Ἴσος δὲ ὁ M τῷ A . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ , καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν A . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν H ἀριθμὸν, οὕτως ὁ H πρὸς τὸν A , καὶ ὁ A πρὸς τὸν B . ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς $A B$ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν $A B$ καὶ μονάδος τῆς E μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν καὶ μονάδος μεταξὺ 10.
κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί. ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν $A B$ καὶ μονάδος τῆς Γ Fig. 10
μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτέωσαν ἀριθμοί οἱ τε ΔE καὶ οἱ $Z H$. λέγω ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν $A B$ καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς $A B$ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ὁ Δ γὰρ τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Θ ποιεῖτω, ἑκάτερος δὲ τῶν ΔZ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν $K A$ ποιεῖτω.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E . ἰσάκεις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν E . Ἡ δὲ Γ μονὰς

νὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Δ ἄρα ἀριθμὸς τὸν E μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα ἐαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ E πρὸς τὸν A · ἰσάκως ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ E τὸν A . Ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ E ἄρα τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν Z ἐαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν H πεποίηκε, τὸν δὲ H πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἐαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκε, τὸν δὲ Z πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Θ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν H . Καὶ ὡς ἄρα ὁ E πρὸς τὸν Θ , οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν H . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἐκάτερον τῶν E Θ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν A K πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν Θ , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν K . Ἀλλ' ὡς ὁ E πρὸς τὸν Θ , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z · καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν K . Πάλιν, ἐπεὶ ἐκάτερος τῶν Δ Z τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν K Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ K πρὸς τὸν Δ . Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν K · καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν K , οὕτως ὁ K πρὸς τὸν Δ . Ἔτι ἐπεὶ ὁ Z ἐκάτερον τῶν Θ H πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν A B πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν H , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν B . Ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν H , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z · καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν B . Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ τε A πρὸς τὸν K ,

καὶ ὁ K πρὸς τὸν A , καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν K , οὕτως ὁ K πρὸς τὸν A , καὶ ὁ A πρὸς τὸν B . οἱ A K A B ἄρα κατὰ τὸ συνεχές ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον· ὅσοι ἄρα ἐκατέρου τῶν A B καὶ τῆς Γ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς A B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ια.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν. 11.

Ἐστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ A B , καὶ τοῦ Fig. 11.
 μὲν A πλευρὰ ἔστω ὁ Γ , τοῦ δὲ B ὁ Δ . λέγω ὅτι τῶν A B εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ .

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν E ποιεῖτω. Καὶ ἐπεὶ τετράγωνός ἐστιν ἀριθμὸς ὁ A , πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἔστιν ὁ Γ . ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν. Ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἐκάτερον τῶν Γ Δ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν A E πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν E . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Γ Δ ἓνα ἀριθμὸν καὶ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιάσαντες τοὺς E B πεποίηκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν B . Ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν E . καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν B . Τῶν A B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ E .

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ . Ἐπεὶ γὰρ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ A E B . ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ A πρὸς τὸν E . Ὡς δὲ ὁ A πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ . ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ Γ πλευρὰ πρὸς τὴν Δ πλευράν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιβ.

Δύο κύβων ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλο- 12.
γόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν
κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ πλευ-
ρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἐστωσαν κύβοι ἀριθμοὶ οἱ A B καὶ τοῦ μὲν A Fig. 12.
πλευρὰ ἔστω ὁ Γ , τοῦ δὲ B ὁ Δ . λέγω ὅτι τῶν A B
δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ A πρὸς
τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ .

Ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν E
ποιεῖτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιεῖτω,
ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν H ποιεῖτω, ἐκά-
τερος δὲ τῶν Γ Δ τὸν Z πολλαπλασιάσας ἑκάτερον
τῶν Θ K ποιεῖτω.

Καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ A , πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ
 Γ , καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίη-
κεν. ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν E
πεποίηκε, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίη-
κεν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλα-
πλασιάσας τὸν H πεποίηκε, τὸν δὲ H πολλαπλασιά-
σας τὸν B πεποίηκεν. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν
 Γ Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν E Z πεποίηκεν.
ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν
 Z . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως
ὁ Z πρὸς τὸν H . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν E
 Z πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν A Θ πεποίηκεν

ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Θ . Ὡς δὲ ὁ E πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ · καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Θ . Πάλιν, ἐπεὶ ἐκάτερος τῶν Γ Δ τὸν Z πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Θ K πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν K . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἐκάτερον τῶν Z H πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν K B πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Z πρὸς τὸν H , οὕτως ὁ K πρὸς τὸν B . Ὡς δὲ ὁ Z πρὸς τὸν H , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ · καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ K πρὸς τὸν B . Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Θ , καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν K · ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν Θ , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν K , καὶ ὁ K πρὸς τὸν B · τῶν A B ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ Θ K .

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ A πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ . Ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ A Θ K B · ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ A πρὸς τὸν Θ . Ὡς δὲ ὁ A πρὸς τὸν Θ , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ · καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Προτασις ψ.

Ἐὰν ὧσιν ὅσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς 13. ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἀνάλογον ἔσονται· καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσι τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται, καὶ αἰεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Ἐστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Fig. 13. A B Γ , ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ , καὶ οἱ A B Γ ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες


τούς $A E Z$ ποιεῖτωσαν, τούς δὲ $A E Z$ πολλαπλασιάζσαντες τούς $H \Theta K$ ποιεῖτωσαν· λέγω ὅτι οἱ τε $A E Z$ καὶ οἱ $H \Theta K$ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν.

Ὁ μὲν γάρ A τὸν B πολλαπλασιάζσας τὸν A ποιεῖτω· ἑκάτερος δὲ τῶν $A B$ τὸν A πολλαπλασιάζσας ἑκάτερον τῶν $M N$ ποιεῖτω. Καὶ πάλιν, ὁ μὲν B τὸν Γ πολλαπλασιάζσας τὸν Ξ ποιεῖτω, ἑκάτερος δὲ τῶν $B \Gamma$ τὸν Ξ πολλαπλασιάζσας ἑκάτερον τῶν $\Theta \Pi$ ποιεῖτω.

Ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν ὅτι οἱ $A A E$ καὶ οἱ $H M N \Theta$ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογόν ἐν τῷ τοῦ A πρὸς τὸν B λόγῳ, καὶ ἔτι οἱ $E \Xi Z$ καὶ οἱ $\Theta \Theta \Pi K$ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ B πρὸς τὸν Γ λόγῳ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ · καὶ οἱ $A A E$ ἄρα τοῖς $E \Xi Z$ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἶσι, καὶ ἔτι οἱ $H M N \Theta$ τοῖς $\Theta \Theta \Pi K$. Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν τῶν $A A E$ πλῆθος τῷ τῶν $E \Xi Z$ πλῆθει, τὸ δὲ τῶν $H M N \Theta$ τῷ τῶν $\Theta \Theta \Pi K$ · δῶσθαι ἄρα ἔστιν ὡς μὲν ὁ A πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z , ὡς δὲ ὁ H πρὸς τὸν Θ , οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν K · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ΄.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον 14.
ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν
μετρήσῃ· καὶ ἔὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν
μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον
μετρήσῃ.

Ἐστῶσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ $A B$, πλευραὶ  14.
δὲ αὐτῶν οἱ $\Gamma \Delta$, ὁ δὲ A τὸν B μετρεῖτω· λέγω ὅτι
καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Ὁ Γ γάρ τὸν A πολλαπλασιάζσας τὸν E ποιεῖτω·
οἱ $A E B$ ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ
πρὸς τὸν A λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ οἱ $A E B$ ἐξῆς ἀνάλο-
γόν εἰσι, καὶ μετρεῖ ὁ A τὸν B · μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ

A τὸν E . Καὶ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ . μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ .

Πάλιν δὴ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖτω. λέγω ὅτι καὶ ὁ A τὸν B μετρεῖ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι οἱ $A E B$ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν E , μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ . μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ A τὸν E . Καὶ εἰσιν οἱ $A E B$ ἐξῆς ἀνάλογον. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ A τὸν B . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν με- 15.
τρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσῃ
καὶ ἔαν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ
κύβος τὸν κύβον μετρήσῃ.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ A κύβον ἀριθμὸν τὸν B Fig. 15.
μετρεῖτω, καὶ τοῦ μὲν A πλευρὰ ἔστω ὁ Γ , τοῦ δὲ
 B ὁ Δ . λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Ὁ Γ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E ποιεῖτω,
ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν H ποιεῖτω, καὶ
ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιεῖτω, ἐκά-
τερος δὲ τῶν $\Gamma \Delta$ τὸν Z πολλαπλασιάσας ἑκάτερον
τῶν ΘK ποιεῖτω. Φανερόν δὴ ὅτι οἱ $E Z H$ καὶ
οἱ $A \Theta K B$ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς
τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ οἱ $A \Theta K B$ ἐξῆς ἀνάλογόν
εἰσι, καὶ μετρεῖ ὁ A τὸν B . μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν Θ .
Καὶ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Θ , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν
 Δ . μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ .

Ἀλλὰ δὴ μετρεῖτω ὁ Γ τὸν Δ . λέγω ὅτι καὶ ὁ
 A τὸν B μετρήσῃ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ
δείξομεν ὅτι οἱ $A \Theta K B$ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν
τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ

μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Θ . καὶ ὁ A ἄρα τὸν Θ μετρεῖ. ὥστε καὶ τὸν B μετρεῖ ὁ A . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιϛ.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον 16.
ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευ-
ρὰν μετρήσει. καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευ-
ρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τε-
τράγωνον μετρήσει.

Ἐστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ A B , πλευραὶ Fig. 16.
δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ Γ Δ , καὶ μὴ μετρεῖτω ὁ A τὸν
 B . λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ , μετρήσει καὶ ὁ A
τὸν B . Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ A τὸν B . οὐδ' ἄρα ὁ Γ
τὸν Δ μετρήσει.

Μὴ μετρεῖτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ . λέγω ὅτι οὐδ'
ὁ A τὸν B μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ A τὸν B , μετρήσει καὶ ὁ Γ
τὸν Δ . Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ . οὐδ' ἄρα ὁ A τὸν
 B μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιζ.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ 17.
μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρή-
σει, καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ με-
τρῇ, οὐδὲ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ A κύβον ἀριθμὸν τὸν Fig. 17.
 B μὴ μετρεῖτω, καὶ τοῦ μὲν A πλευρὰ ἔστω ὁ Γ ,
τοῦ δὲ B ὁ Δ . λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ οὐ μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ , καὶ ὁ A τὸν B με-
τρήσει. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ A τὸν B . οὐδ' ἄρα ὁ Γ
τὸν Δ μετρήσει.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρεῖτω ὁ Γ τὸν Δ . λέγω ὅτι οὐδ'
ὁ A τὸν B μετρήσει.

Εἰ γὰρ ὁ A τὸν B μετρεῖ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ . οὐδ' ἄρα ὁ A τὸν B μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστὶν ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. 18.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι οἱ $A B$, Fig. 18. καὶ τοῦ μὲν A πλευραὶ ἔστωσαν οἱ $\Gamma \Delta$ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ B οἱ $E Z$. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . Λέγω οὖν ὅτι τῶν $A B$ εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστὶν ἀριθμός, καὶ ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, ὁ Γ , πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τὸν E , ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Z .

Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z . Καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδός ἐστὶν ὁ A , πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ $\Gamma \Delta$. ὁ Δ ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ E τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν. Ὁ Δ δὴ τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν H ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν H πεποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν H . Ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z . καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν H . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ E τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν H πεποίηκε, τὸν δὲ Z πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν B . Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν

Z , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν H . καὶ ὥς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν H , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν B . οἱ A H B ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι. τῶν A B ἄρα εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστὶν ἀριθμός.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τοῦτ' ἐστὶν, ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν E , ἢ ὁ A πρὸς τὸν Z . Ἐπεὶ γὰρ οἱ A H B ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸν H . Καὶ ἔστιν ὥς ὁ A πρὸς τὸν H , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν E καὶ ὁ A πρὸς τὸν Z . καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν E , ἢ ὁ A πρὸς τὸν Z . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ'.

Δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν δύο μέ- 19.
σοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καὶ ὁ
ατερεὸς πρὸς τὸν ὁμοιον ατερεὸν τριπλα-
σίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ
πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν.

Ἐστωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ οἱ A B , καὶ τοῦ Fig. 19.
μὲν A πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ Δ E , τοῦ δὲ B οἱ Z
 H Θ . Καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν οἱ ἀνάλογον
ἔχοντες τὰς πλευράς. ἐστὶν ἄρα ὥς μὲν ὁ Γ πρὸς
τὸν Δ , οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H , ὥς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν
 E , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Θ . Λέγω ὅτι τῶν A B
δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ A
πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ Γ πρὸς
τὸν Z , καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν H , καὶ ἔτι ὁ E πρὸς τὸν Θ .

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν K ποιεῖτω,
ὁ δὲ Z τὸν H πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιεῖτω. Καὶ
ἐπεὶ οἱ Γ Δ τοῖς Z H ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ
ἐκ μὲν τῶν Γ Δ ἐστὶν ὁ K , ἐκ δὲ τῶν Z H ὁ Λ .
οἱ K Λ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί. τῶν K
 Λ ἄρα εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστὶν ἀριθμός. Ἐστω ὁ

ὁ M . ὁ M ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ Z ὡς ἐν τῷ πρὸ
τούτου θεωρήματι ἐδείχθη. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν
 Γ πολλαπλασιάσας τὸν K πεποίηκε, τὸν δὲ Z πολ-
λαπλασιάσας τὸν M πεποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ
πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ K πρὸς τὸν M . Ἀλλ' ὡς ὁ K
πρὸς τὸν M , οὕτως ὁ M πρὸς τὸν Λ . οἱ K M Λ
ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Z
λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ
 Z πρὸς τὸν H . ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς
τὸν Z , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν H . Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν
ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Θ . ἐναλ-
λάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν H , οὕτως ὁ E
πρὸς τὸν Θ . οἱ K M Λ ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν
ἐν τε τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Z λόγῳ καὶ τῷ τοῦ Δ
πρὸς τὸν H καὶ ἔτι τῷ τοῦ E πρὸς τὸν Θ . Ἐκά-
τερος δὴ τῶν E Θ τὸν M πολλαπλασιάσας ἑκάτερον
τῶν N Ξ ποιεῖτω. Καὶ ἐπεὶ στερεός ἐστὶν ὁ A ,
πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Γ Δ E . ὁ E ἄρα τὸν ἐκ
τῶν Γ Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν· ὁ δὲ
ἐκ τῶν Γ Δ ἐστὶν ὁ K . ὁ E ἄρα τὸν K πολλαπλα-
σιάσας τὸν A πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Θ
τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ τῶν Z H , τὸν B ,
πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ E τὸν K πολλαπλασιάσας
τὸν A πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν M πολλαπλα-
σιάσας τὸν N πεποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ K πρὸς
τὸν M , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν N . Ὡς δὲ ὁ K πρὸς
τὸν M , οὕτως ὁ τε Γ πρὸς τὸν Z , καὶ ὁ Δ πρὸς
τὸν H , καὶ ἔτι ὁ E πρὸς τὸν Θ . καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ
πρὸς τὸν Z , καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν H , καὶ ὁ E πρὸς τὸν
 Θ , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν N . Πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος
τῶν E Θ τὸν M πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν N
 Ξ πεποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν Θ , οὕτως
ὁ N πρὸς τὸν Ξ . Ἀλλ' ὡς ὁ E πρὸς τὸν Θ , οὕτως
ὁ τε Γ πρὸς τὸν Z , καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν H . ἐστὶν

ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Z , καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν H , καὶ ὁ E πρὸς τὸν Θ , οὕτως ὁ τε A πρὸς τὸν N , καὶ ὁ N πρὸς τὸν Ξ . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Θ τὸν M πολλαπλασιάσας τὸν Ξ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ M πρὸς τὸν A , οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν B . Ἀλλ' ὡς ὁ M πρὸς τὸν A , οὕτως ὁ τε Γ πρὸς τὸν Z , καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν H , καὶ ὁ E πρὸς τὸν Θ · καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Z , καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν H , καὶ ὁ E πρὸς τὸν Θ , οὕτως οὐ μόνον ὁ Ξ πρὸς τὸν B , ἀλλὰ καὶ ὁ A πρὸς τὸν N , καὶ ὁ N πρὸς τὸν Ξ · οἱ A N Ξ B ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς εἰρημένοις τῶν πλευρῶν λόγοις.

Λέγω ὅτι καὶ ὁ A πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τοῦτ' ἔστιν ἢ περ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Z , ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν H , καὶ ἔτι ὁ E πρὸς τὸν Θ . Ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ A N Ξ B · ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ὁ A πρὸς τὸν N . Ἀλλ' ὡς ὁ A πρὸς τὸν N , οὕτως ἐδείχθη ὁ τε Γ πρὸς τὸν Z , καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν H , καὶ ἔτι ὁ E πρὸς τὸν Θ · καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἢ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τοῦτ' ἔστιν, ἢ περ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Z , καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν H , καὶ ἔτι ὁ E πρὸς τὸν Θ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον 20. ἐμπύπτῃ ἀριθμῶς· ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν A B εἷς μέσος ἀνάλογον Fig. 20. ἐμπιπτέτω ἀριθμῶς ὁ Γ · λέγω ὅτι οἱ A B ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί.

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A F , οἱ Δ E . ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν F . ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν A μετρεῖ, καὶ ὁ E τὸν F . Ὅσάκις δὴ ὁ Δ τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Z . ὁ Z ἄρα τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν F πεποίηκεν. ὥστε ὁ A ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Δ Z . Ἡάλιν, ἐπεὶ οἱ Δ E ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A F , τοῦτ' ἔστιν τοῖς F B . ὡς γὰρ ὁ A πρὸς τὸν F , οὕτως ὁ F πρὸς τὸν B . ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν F μετρεῖ καὶ ὁ E τὸν B . Ὅσάκις δὴ ὁ Δ τὸν F μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ H . καὶ ὁ E ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ H μονάδας. ὁ H ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν. ὁ B ἄρα ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ E H . οἱ A B ἄρα ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὅμοιοι. Ἐπεὶ γὰρ ἐκάτερος τῶν Z H τὸν E πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν F B πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Z πρὸς τὸν H , οὕτως ὁ F πρὸς τὸν B . Ὡς δὲ ὁ F πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E . καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H . Καὶ ἐναλλάξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν H . οἱ A B ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ εἰσιν, αἱ γὰρ πλευραὶ αὐτῶν ἀνάλογόν εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον 21.
ἐμπίπτωσιν ἀριθμοὶ, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν
οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν A B δύο μέσοι ἀνάλογον Fig. 21.
ἐμπίπτετῶσαν ἀριθμοὶ, οἱ Γ Δ . λέγω ὅτι οἱ A B
ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν.

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων τοῖς $A \Gamma \Delta$, οἱ $E Z H$ · οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ $E H$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ τῶν $E H$ εἰς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτωκεν ἀριθμὸς ὁ Z · οἱ $E H$ ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπιπεδοὶ εἰσιν. Ἐστῶσαν οὖν τοῦ μὲν E πλευραὶ οἱ ΘK , τοῦ δὲ H οἱ $A M$ · φανερόν ἄρα ἐστὶν ἐκ τοῦ πρὸ τούτου ὅτι οἱ $E Z H$ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τε τῇ τοῦ Θ πρὸς τὸν A λόγῳ καὶ τῇ τοῦ K πρὸς τὸν M . Καὶ ἐπεὶ οἱ $E Z H$ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων τοῖς $A \Gamma \Delta$, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν $E Z H$ τῷ πλῆθει τῶν $A \Gamma \Delta$ · διῶσθαι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ E πρὸς τὸν H , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Δ . Οἱ δὲ $E H$ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκως, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τοῦτ' ἐστὶν ὁ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ἰσάκως ἄρα ὁ E τὸν A μετρεῖ, καὶ ὁ H τὸν Δ . Ὅσακις δὴ ὁ E τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστῶσαν ἐν τῷ N · ὁ N ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. Ὁ δὲ E ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν ΘK · ὁ N ἄρα τὸν ἐκ τῶν ΘK πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε· στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ A , πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ $\Theta K N$. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ $E Z H$ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων τοῖς $\Gamma \Delta B$ · ἰσάκως ἄρα ὁ E τὸν Γ μετρεῖ, καὶ ὁ H τὸν B . Ὅσακις δὴ ὁ E τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστῶσαν ἐν τῷ Ξ · καὶ ὁ H ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα τὸν H πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν. Ὁ δὲ H ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν $A M$ · ὁ Ξ ἄρα τὸν μὲν ἐκ τῶν $A M$ πολλαπλασιάσας τὸν μὲν B πεποίηκε, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε· στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ B , πλευραὶ

δὲ αὐτοῦ εἰσὶν οἱ $A M \Xi$. οἱ $A B$ ἄρα στερεοὶ εἰσι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὅμοιοι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ $N \Xi$ τὸν E πολλαπλασιάσαντες τοὺς $A \Gamma$ πεποίηκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ N πρὸς τὸν Ξ , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Γ , τοῦτ' ἔστιν ὁ E πρὸς τὸν Z . Ἀλλ' ὡς ὁ E πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν A , καὶ ὁ K πρὸς τὸν M . καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν A , οὕτως ὁ K πρὸς τὸν M , καὶ ὁ N πρὸς τὸν Ξ . Καί εἰσιν οἱ μὲν $\Theta K N$ πλευραὶ τοῦ A , οἱ δὲ $\Xi A M$ πλευραὶ τοῦ B . οἱ $A B$ ἄρα ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, 22.
ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾗ· καὶ ὁ τρίτος τε-
τράγωνος ἔσται.

Ἐστώσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ $A B$ Fig. 22.
 Γ , ὁ δὲ πρῶτος, ὁ A , τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ
ὁ τρίτος, ὁ Γ , τετράγωνός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν $A \Gamma$ εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν
ἀριθμὸς, ὁ B . οἱ $A \Gamma$ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι.
Τετράγωνος δὲ ὁ A · τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ · ὅπερ
ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κγ.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον 23.
ᾧσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾗ· καὶ ὁ τέταρτος
κύβος ἔσται.

Ἐστώσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Fig. 23.
 $A B \Gamma \Delta$, ὁ δὲ A κύβος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Δ
κύβος ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν $A \Delta$ δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθ-
μοί, οἱ $B \Gamma$. οἱ $A \Delta$ ἄρα ὅμοιοί εἰσι στερεοὶ ἀριθμοί.
Κύβος δὲ ὁ A · κύβος ἄρα καὶ ὁ Δ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κδ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον 24.
ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-
γωνον ἀριθμὸν, ὃ δὲ πρῶτος τετράγωνος ἦ·
καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ $A B$ πρὸς ἀλλήλους λόγον Fig. 24.
ἔχεωσαν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς τετράγω-
νον ἀριθμὸν τὸν Δ , ὃ δὲ A τετράγωνος ἔστω· λέγω
ὅτι καὶ ὁ B τετράγωνός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ $\Gamma \Delta$ τετράγωνοί εἰσιν· οἱ $\Gamma \Delta$ ἄρα
ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν $\Gamma \Delta$ ἄρα εἰς μέσος ἀνάλο-
γον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ ,
οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B · καὶ τῶν $A B$ ἄρα εἰς μέ-
σος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστιν ὁ A τε-
τράγωνος καὶ ὁ B ἄρα τετράγωνός ἐστιν· ὅπερ ἔδει
δειῖξαι.

Πρότασις κε.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον 25.
ἔχωσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθ-
μὸν, ὃ δὲ πρῶτος κύβος ἦ· καὶ ὁ δεύτερος
κύβος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ $A B$ πρὸς ἀλλήλους λόγον Fig. 25.
ἔχεωσαν, ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς κύβον ἀριθ-
μὸν τὸν Δ , κύβος δὲ ἔστω ὁ A · λέγω ὅτι καὶ ὁ B
κύβος ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ $\Gamma \Delta$ κύβοι εἰσιν, οἱ $\Gamma \Delta$ ὅμοιοι
στερεοί εἰσι· τῶν $\Gamma \Delta$ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμ-
πίπτουσιν ἀριθμοί. Ὅσοι δὲ εἰς τοὺς $\Gamma \Delta$ μεταξὺ
κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, το-
σοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς·
ὥστε καὶ τῶν $A B$ δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν
ἀριθμοί. Ἐμπιπτέωσαν οἱ $E Z$. Ἐπεὶ οὖν τέσσαρες
ἀριθμοὶ οἱ $A E Z B$ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστι
κύβος ὁ A · κύβος ἄρα καὶ ὁ B · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κʹ.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλή- 26.
λους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθ-
μὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐστῶσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ A B . λέγω Fig. 26.
ὅτι ὁ A πρὸς τὸν B λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθ-
μὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ A B ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν A B ἄρα
εἰς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Ἐμπίπτέτω,
καὶ ἔστω ὁ Γ , καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ
τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων τοῖς A Γ B , οἱ Δ E
 Z . οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Δ Z τετράγωνοί εἰσι. Καὶ
ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν
 B , καὶ εἰσιν οἱ Δ Z τετράγωνοι· ὁ A ἄρα πρὸς τὸν
 B λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγω-
νον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κζʹ.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλή- 27.
λους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς
κύβον ἀριθμόν.

Ἐστῶσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ, οἱ A B . λέγω Fig. 27.
ὅτι ὁ A πρὸς τὸν B λόγον ἔχει, ὃν κύβος ἀριθμὸς
πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ A B ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν A B
ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ἐμ-
πιπτέτωσαν οἱ Γ Δ , καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθ-
μοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων τοῖς A Γ Δ B
ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος, οἱ E Z H Θ . οἱ ἄρα ἄκροι
αὐτῶν οἱ E Θ κύβοι εἰσὶ. Καὶ ἐστὶν ὡς ὁ E πρὸς
τὸν Θ , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B . καὶ ὁ A ἄρα πρὸς
τὸν B λόγον ἔχει, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθ-
μόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ ὀγδόου βιβλίου.

**ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.**

~~~~~

**Πρότασις α**

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολ- 1.  
λαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ  
γενόμενος τετράγωνος ἔσται.

Ἐστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ  $A$   $B$ , Fig. 1.  
καὶ ὁ  $A$  τὸν  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  ποιεῖτω· λέγω  
ὅτι ὁ  $\Gamma$  τετράγωνός ἐστιν.

Ὁ γὰρ  $A$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  ποιεῖτω  
ὁ  $\Delta$  ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $A$  ἑαυτὸν  
μὲν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποίηκε, τὸν δὲ  $B$  πολ-  
λαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ  $A$   
πρὸς τὸν  $B$ , οὕτως ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ . Καὶ ἐπεὶ οἱ  $A$   
 $B$  ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν  $A$   $B$  ἄρα εἷς  
μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Ἐὰν δὲ δύο  
ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπ-  
τωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι, τοσοῦ-  
τοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας· ὥστε καὶ  
τῶν  $\Delta$   $\Gamma$  εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ  
ἔστι τετράγωνος ὁ  $\Delta$ · τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ  $\Gamma$ ·  
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

**Πρότασις β.**

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες 2.  
ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον· ὅμοιοι ἐπίπε-  
δοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ  $A$   $B$ , καὶ ὁ  $A$  τὸν  $B$  πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν  $\Gamma$  ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ  $A$   $B$  ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί.

Ὁ γὰρ  $A$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  ποιείτω· ὁ  $\Delta$  ἄρα τετράγωνός ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $A$  ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποίηκε, τὸν δὲ  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ , ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ . Καὶ ἐπεὶ ὁ  $\Delta$  τετράγωνός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὁ  $\Gamma$ · οἱ  $\Delta$   $\Gamma$  ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσι. Τῶν  $\Delta$   $\Gamma$  ἄρα εἰς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός, καὶ ἔστιν ὡς ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ , οὕτως ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ · καὶ τῶν  $A$   $B$  ἄρα εἰς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ, ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν οἱ ἀριθμοί· οἱ ἄρα  $A$   $B$  ὅμοιοι εἰσιν ἐπίπεδοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις γ.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλα- 3.  
σιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ  $A$  ἑαυτὸν πολλαπλασιά- Fig. 3.  
σας τὸν  $B$  ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ  $B$  κύβος ἐστίν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ  $A$  πλευρὰ, ὁ  $\Gamma$ , καὶ ὁ  $\Gamma$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  ποιείτω· φανερόν δὴ ἔστιν ὅτι ὁ  $\Gamma$  τὸν  $\Delta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $A$  πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $\Gamma$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποίηκεν· ὁ  $\Gamma$  ἄρα τὸν  $\Delta$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ μονὰς τὸν  $\Gamma$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν  $\Gamma$ , ὁ  $\Gamma$  πρὸς τὸν  $\Delta$ . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ  $\Gamma$  τὸν  $\Delta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $A$  πεποίηκεν· ὁ  $\Delta$  ἄρα τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $\Gamma$  μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν  $\Gamma$  κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν  $\Gamma$ ,

ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $A$ . Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν  $\Gamma$ , ὁ  $\Gamma$  πρὸς τὸν  $\Delta$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν  $\Gamma$ , οὕτως ὁ  $\Gamma$  πρὸς τὸν  $\Delta$ , καὶ ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $A$ · τῆς ἄρα μονάδος καὶ τοῦ  $A$  ἀριθμοῦ δύο μέσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχές ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, οἱ  $\Gamma$   $\Delta$ . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ  $A$  ἐαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποίηκεν· ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $B$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν  $A$  κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν  $A$ , ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ . Τῆς δὲ μονάδος καὶ τοῦ  $A$  δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί· καὶ τῶν  $A$   $B$  ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. Καὶ ἔστιν ὁ  $A$  κύβος· καὶ ὁ  $B$  ἄρα κύβος ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

#### Πρότασις δ.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν 4. πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γεγόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ  $A$  κύβον ἀριθμὸν τὸν  $B$  Fig. 4. πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  ποιείτω· λέγω· ὅτι ὁ  $\Gamma$  κύβος ἐστίν.

Ὁ γὰρ  $A$  ἐαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  ποιείτω· ὁ  $\Delta$  ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $A$  ἐαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποίηκε, τὸν δὲ  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ , οὕτως ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ . Καὶ ἐπεὶ οἱ  $A$   $B$  κύβοι εἰσιν, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ  $A$   $B$ · τῶν  $A$   $B$  ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· ὥστε καὶ τῶν  $\Delta$   $\Gamma$  δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύβος ὁ  $\Delta$ · κύβος ἄρα καὶ ὁ  $\Gamma$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις ε.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἔσται. 5.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ  $A$  ἀριθμὸν τινα τὸν  $B$  πολλαπλασιάσας κύβον τὸν  $\Gamma$  ποιεῖτω· λέγω ὅτι ὁ  $B$  κύβος ἐστίν. Fig. 5.

Ὁ γὰρ  $A$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  ποιεῖτω· κύβος ἄρα ἐστίν ὁ  $\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ ὁ  $A$  ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποίηκε, τὸν δὲ  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ , ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ . Καὶ ἐπεὶ οἱ  $\Delta$   $\Gamma$  κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσι· τῶν  $\Delta$   $\Gamma$  ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ , οὕτως ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ · καὶ τῶν  $A$   $B$  ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύβος ὁ  $A$ · κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ  $B$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις ς.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται. 6.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ  $A$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν  $B$  ποιεῖτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ  $A$  κύβος ἐστίν. Fig. 6.

Ὁ γὰρ  $A$  τὸν  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  ποιεῖτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ  $A$  ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποίηκε, τὸν δὲ  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν· ὁ  $\Gamma$  ἄρα κύβος ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $A$  ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποίηκε, τὸν δὲ  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ , ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ . Καὶ ἐπεὶ οἱ  $B$   $\Gamma$  κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσι· τῶν  $B$   $\Gamma$  ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ , οὕτως ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ · καὶ τῶν  $A$   $B$  ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί.

Καὶ ἔστι κύβος ὁ  $B$ . κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ  $A$ . ὅπερ  
ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ.

Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα 7.  
πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος  
στερεὸς ἔσται.

Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ  $A$  ἀριθμόν τινα τὸν Fig. 7.  
 $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  ποιεῖτω· λέγω ὅτι ὁ  $\Gamma$   
στερεός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ  $A$  σύνθετός ἐστιν, ὑπὸ ἀριθμοῦ τι-  
νος μετρηθήσεται. Μετρεῖσθω ὑπὸ τοῦ  $\Delta$ , καὶ ὁσά-  
κις ὁ  $\Delta$  τὸν  $A$  μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν  
τῷ  $E$ . Ἐπεὶ οὖν ὁ  $\Delta$  τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  
 $E$  μονάδας· ὁ  $E$  ἄρα τὸν  $\Delta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $A$   
πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $A$  τὸν  $B$  πολλαπλασιάσας  
τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν, ὁ δὲ  $A$  ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν  $\Delta$   $E$ . ὁ  
ἄρα ἐκ τῶν  $\Delta$   $E$  τὸν  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πε-  
ποίηκεν καὶ ὁ  $B$  ἄρα τὸν ἐκ τῶν  $\Delta$   $E$  πολλαπλασιά-  
σας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν· ὁ  $\Gamma$  ἄρα στερεός ἐστι, πλεу-  
ραι δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ  $\Delta$   $E$   $B$ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὀποσοιούν ἀριθμοὶ 8.  
ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς  
μονάδος τετράγωνος ἔσται καὶ οἱ ἕνα δια-  
λείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος κύβος καὶ  
οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἑβδομος  
κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε δια-  
λείποντες πάντες.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ὀποσοιούν ἀριθμοὶ ἐξῆς Fig. 8.  
ἀνάλογον, οἱ  $A$   $B$   $\Gamma$   $\Delta$   $E$   $Z$ . λέγω ὅτι ὁ μὲν τρίτος  
ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ  $B$  τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα δια-  
λείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος ὁ  $\Gamma$  κύβος καὶ οἱ  
δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἑβδομος ὁ  $Z$  κύβος  
ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν  $A$ , οὕτως ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ . ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν  $A$  ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ  $A$  τὸν  $B$ . Ἡ δὲ μονὰς τὸν  $A$  ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· καὶ ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $B$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $A$  μονάδας· ὁ  $A$  ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποίηκε τετράγωνος ἄρα ἐστὶν ὁ  $B$ . Καὶ ἐπεὶ οἱ  $B$   $\Gamma$   $\Delta$  ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ  $B$  τετράγωνός ἐστι· καὶ ὁ  $\Delta$  ἄρα τετράγωνός ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ  $Z$  τετράγωνός ἐστιν. Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες τετράγωνοί εἰσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ  $\Gamma$  κύβος ἐστὶ, καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν  $A$ , οὕτως ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ . ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν  $A$  ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ  $B$  τὸν  $\Gamma$ . Ἡ δὲ μονὰς τὸν  $A$  ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· καὶ ὁ  $B$  ἄρα τὸν  $\Gamma$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $A$  μονάδας· ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν. Ἐπεὶ οὖν ὁ  $A$  ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποίηκε, τὸν δὲ  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκε· κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ  $\Gamma$ . Καὶ ἐπεὶ οἱ  $\Gamma$   $\Delta$   $E$   $Z$  ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ  $\Gamma$  κύβος ἐστὶ· καὶ ὁ  $Z$  ἄρα κύβος ἐστίν. Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες κύβοι εἰσὶ. Λέγω δὴ πάλιν ὅτι καὶ ὁ ἑβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ  $Z$  κύβος ἔμα καὶ τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες. Ἐπεὶ γὰρ ὁ  $Z$  κύβος ἐστίν, ἐδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ  $Z$  ἄρα κύβος τέ ἐστι καὶ τετράγωνος. Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες κύβοι τέ εἰσι καὶ τετράγωνοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις θ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ 9.  
ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα

τετράγωνος ἢ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. Καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ἢ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἐστῶσαν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ὅποσοι οὖν Fig. 9. ἀριθμοὶ, οἱ  $A B \Gamma \Delta E Z$ , ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα, ὁ  $A$ , τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ  $B$  τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ  $A B \Gamma$  ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ  $A$  τετράγωνος· καὶ ὁ  $\Gamma$  ἄρα τετράγωνός ἐστι. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ  $B \Gamma \Delta$  ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ  $B$  τετράγωνος· καὶ ὁ  $\Delta$  ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Ὀμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ  $A$  κύβος· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ  $\Gamma$  κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν  $A$ , οὕτως ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ · ἰσάκως ἄρα ἡ μονὰς τὸν  $A$  μετρεῖ καὶ ὁ  $A$  τὸν  $B$ . Ἡ δὲ μονὰς τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· καὶ ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $B$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῇ  $A$  μονάδας· ὁ  $A$  ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποίηκε, καὶ ἔστιν ὁ  $A$  κύβος. Ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινά, ὁ γενομένος κύβος ἐστὶ· καὶ ὁ  $B$  ἄρα κύβος ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ  $A B \Gamma \Delta$  ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ  $A$  κύβος· καὶ ὁ  $\Delta$  ἄρα κύβος ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ  $E$  κύβος ἐστὶ, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



## Πρότασις ι

Ἐάν ἀπὸ μονάδος ὀποσοιούν ἀριθμοὶ 10.  
ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ  
ἢ τετράγωνος· οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγω-  
νος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονά-  
δος καὶ τῶν ἓνα διαλειπόντων πάντων. Καὶ  
ἐάν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾗ, οὐδ'  
ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρ-  
του ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλει-  
πόντων πάντων.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ὀπο- Fig. 10.  
σοιούν ἀριθμοὶ οἱ  $A B \Gamma \Delta E Z$ , ὁ δὲ μετὰ τὴν  
μονάδα ὁ  $A$  μὴ ἔστω τετράγωνος· λέγω ὅτι οὐδ'  
ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου  
ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἓνα διαλειπόντων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ  $\Gamma$  τετράγωνος. Ἔστι  
δὲ καὶ ὁ  $B$  τετράγωνος· οἱ  $B \Gamma$  ἄρα πρὸς ἀλλήλους  
λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγω-  
νον ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ ,  
ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ · οἱ  $A B$  ἄρα πρὸς ἀλλήλους  
λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-  
γωνον ἀριθμόν· ὥστε οἱ  $A B$  ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι.  
Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ  $B$ · τετράγωνος ἄρα ἐστὶ καὶ  
ὁ  $A$ , ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ  $\Gamma$  τετράγωνός  
ἐστιν. Ὅμοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς  
τετράγωνός ἐστι, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος  
καὶ τῶν ἓνα διαλειπόντων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ  $A$  κύβος. Λέγω ὅτι οὐδ'  
ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ  
τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ  $A$  κύβος. Ἔστι δὲ καὶ  
ὁ  $\Gamma$  κύβος, τέταρτος γάρ ἐστιν ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ  
ἔστιν ὡς ὁ  $\Gamma$  πρὸς τὸν  $\Delta$ · ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ · καὶ ὁ  
 $B$  ἄρα πρὸς τὸν  $\Gamma$  λόγον ἔχει, ὃν κύβος πρὸς κύβον.

Καὶ ἔστιν ὁ  $\Gamma$  κύβος· καὶ ὁ  $B$  ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν  $A$ , ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ , ἡ δὲ μονὰς τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $B$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὁ  $A$  ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν  $B$  πεποίηκεν. Ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται· κύβος ἄρα καὶ ὁ  $A$ , ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ  $A$  κύβος ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἐστὶ χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ια.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὀποσοιοῦν ἀριθμοὶ 11. ἐξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατὰ τινὰ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς  $A$  ὀποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ  $B$   $\Gamma$   $\Delta$   $E$ . λέγω ὅτι τῶν  $B$   $\Gamma$   $\Delta$   $E$  ὁ ἐλάττων ὁ  $B$  τὸν μείζονα τὸν  $E$  μετρεῖ κατὰ τινὰ τῶν  $\Gamma$   $\Delta$ . Fig. 11.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ  $A$  μονὰς πρὸς τὸν  $B$ , οὕτως ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $E$ . ἰσάκεις ἄρα ἡ  $A$  μονὰς τὸν  $B$  ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ  $\Delta$  τὸν  $E$ . ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἡ  $A$  μονὰς τὸν  $\Delta$  μετρεῖ καὶ ὁ  $B$  τὸν  $E$ . Ἡ δὲ  $A$  μονὰς τὸν  $\Delta$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ  $B$  ἄρα τὸν  $E$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $\Delta$  μονάδας· ὥστε ὁ ἐλάττων ὁ  $B$  τὸν μείζονα τὸν  $E$  μετρεῖ κατὰ τινὰ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ιβ.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὀποσοιοῦν ἀριθμοὶ 12. ἐξῆς ἀνάλογον ὦσιν· ὑφ' ὧν ἂν ὁ ἔσχατος

πρώτων ἀριθμῶν μετρήται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὅποιοιῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς. Fig. 12. ἀνάλογον οἱ  $A, B, \Gamma, \Delta$ . λέγω ἔτι ὑφ' ὧν ὁ  $\Delta$  πρώτων ἀριθμῶν μετρήται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ  $A$  μετρηθήσεται.

Μετρεῖσθω γὰρ ὁ  $\Delta$  ὑπὸ τινος πρώτου ἀριθμοῦ τοῦ  $E$ . λέγω ὅτι ὁ  $E$  καὶ τὸν  $A$  μετρεῖ. Μή γὰρ μετρεῖτω ὁ  $E$  τὸν  $A$ . καὶ ἔστιν ὁ  $E$  πρώτος, ἅπας δὲ πρώτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρώτος ἐστίν. οἱ  $E, A$  ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $E$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ, μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν  $Z$ . ὁ  $E$  ἄρα τὸν  $Z$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποίηκε. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ  $A$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $\Gamma$  μονάδας. ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $\Gamma$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ  $E$  τὸν  $Z$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποίηκεν. ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $A, \Gamma$  ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν  $E, Z$ . ἔστιν ἄρα ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $E$ , οὕτως ὁ  $Z$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ . Οἱ δὲ  $A, E$  πρώτοι, οἱ δὲ πρώτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ  $E$  τὸν  $\Gamma$ . Μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν  $H$ . ὁ  $E$  ἄρα τὸν  $H$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν διὰ τὸ πρὸ τούτου καὶ ὁ  $A$  τὸν  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν. ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $A, B$  ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν  $E, H$ . ἔστιν ἄρα ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $E$ , οὕτως ὁ  $H$  πρὸς τὸν  $B$ . Οἱ δὲ  $A, E$  πρώτοι, οἱ δὲ πρώτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις, ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ  $E$  τὸν  $B$ . Μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν  $\Theta$ . ὁ  $E$  ἄρα τὸν  $\Theta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ  $A$  ἐαυτὸν πολ-

λαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $\Theta$   $E$  ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ  $A$ · ἔστιν ἄρα ὡς ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $A$ , ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $\Theta$ . Οἱ δὲ  $A$   $E$  πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὰν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὁ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων, τὸν ἐλάττονα, τοῦτ' ἔστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ  $E$  τὸν  $A$ . Ἀλλὰ μὴν καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ  $A$   $E$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ· σύνθετοι ἄρα. Οἱ δὲ σύνθετοι ὑπὸ τινος ἀριθμοῦ μετροῦνται· οἱ  $A$   $E$  ἄρα ὑπὸ τινος ἀριθμοῦ μετροῦνται. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $E$  πρῶτος ὑπάκειται, ὁ δὲ πρῶτος ὑφ' ἑτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται ἢ ὑφ' ἑαυτοῦ· ὁ  $E$  ἄρα τοὺς  $A$   $E$  μετρεῖ· ὥστε καὶ ὁ  $E$  τὸν  $A$  μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν  $\Delta$ · ὁ  $E$  ἄρα τοὺς  $A$   $\Delta$  μετρεῖ. Ὅμοίως δὴ δείξαμεν ὅτι ὑφ' ὧν ἂν ὁ  $\Delta$  πρῶτων ἀριθμῶν μετρηῖται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ  $A$  μετρηθήσεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσιοῦν ἀριθμοὶ 13.  
ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα  
πρῶτος ἢ· ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου  
μετρηθήσεται, παρὲκ τῶν ὑπαρχάντων  
ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἐστῶσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς Fig. 13.  
ἀνάλογον οἱ  $A$   $B$   $\Gamma$   $\Delta$ , ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ  $A$   
πρῶτος ἔστω· λέγω ὅτι ὁ μέγιστος αὐτῶν ὁ  $\Delta$  ὑπ'  
οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, παρὲκ τῶν  $A$   $B$   $\Gamma$ .

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖσθω ὑπὸ τοῦ  $E$ , καὶ ὁ  $E$   
μηδενὶ τῶν  $A$   $B$   $\Gamma$  ἔστω ὁ αὐτός. Φανερόν δὴ ὅτι  
ὁ  $E$  πρῶτος οὐκ ἐστίν. Εἰ γὰρ ὁ  $E$  πρῶτός ἐστι καὶ  
μετρεῖ τὸν  $\Delta$ , καὶ τὸν  $A$  μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ

ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ  $E$  πρῶτός ἐστι· σύνθετος ἄρα. Ἄπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ  $E$  ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Λέγω δὴ ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται πρῶτον, πλὴν τοῦ  $A$ . Εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρεῖται ὁ  $E$ , ὁ δὲ  $E$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ· καὶ κεῖνος ἄρα τὸν  $\Delta$  μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν  $A$  μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $E$  μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $E$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ, μετρεύω αὐτὸν κατὰ τὸν  $Z$ . Λέγω ὅτι ὁ  $Z$  οὐδενὶ τῶν  $A B \Gamma$  ἐστὶν ὁ αὐτός. Εἰ γὰρ ὁ  $Z$  ἐνὶ τῶν  $A B \Gamma$  ἐστὶν ὁ αὐτός, καὶ μετρεῖ τὸν  $\Delta$  κατὰ τὸν  $E$ , καὶ εἰς ἄρα τῶν  $A B \Gamma$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ κατὰ τὸν  $E$ . Ἀλλὰ εἰς τῶν  $A B \Gamma$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ κατὰ τινὰ τῶν  $A B \Gamma$ · καὶ ὁ  $E$  ἄρα ἐνὶ τῶν  $A B \Gamma$  ἐστὶν ὁ αὐτός, ὅπερ οὐκ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ  $Z$  ἐνὶ τῶν  $A B \Gamma$  ἐστὶν ὁ αὐτός. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι μετρεῖται ὁ  $Z$  ὑπὸ τοῦ  $A$ , δεικνύντες πάλιν ὅτι ὁ  $Z$  οὐκ ἐστὶ πρῶτος. (Εἰ γὰρ πρῶτος, καὶ μετρεῖ τὸν  $\Delta$ · καὶ τὸν  $A$  μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πρῶτός ἐστιν ὁ  $Z$ · σύνθετος ἄρα. Ἄπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ  $Z$  ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Λέγω δὴ ὅτι ὑφ' ἑτέρου πρῶτου οὐ μετρηθήσεται, πλὴν τοῦ  $A$ . Εἰ γὰρ ἕτερός τις πρῶτος τὸν  $Z$  μετρεῖ, ὁ δὲ  $Z$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ· καὶ κεῖνος ἄρα τὸν  $\Delta$  μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν  $A$  μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $Z$  μετρεῖ.) Καὶ ἐπεὶ ὁ  $E$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ κατὰ τὸν  $Z$ · ὁ  $E$  ἄρα τὸν  $Z$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ  $A$  τὸν  $\Gamma$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $A \Gamma$  ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν  $E Z$ · ἀνάλογον

ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $E$ , οὕτως ὁ  $Z$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ . Ὁ δὲ  $A$  τὸν  $E$  μετρεῖ· καὶ ὁ  $Z$  ἄρα τὸν  $\Gamma$  μετρεῖ. Μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν  $H$ . Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὁ  $H$  οὐδενὶ τῶν  $A$   $B$  ἐστὶν ὁ αὐτός· καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ  $A$ . Καὶ ἐπεὶ ὁ  $Z$  τὸν  $\Gamma$  μετρεῖ κατὰ τὸν  $H$ · ὁ  $Z$  ἄρα τὸν  $H$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ  $A$  τὸν  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $A$   $B$  ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν  $Z$   $H$ · ἀνάλογον ἄρα ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $Z$ , οὕτως ὁ  $H$  πρὸς τὸν  $B$ . Μετρεῖ δὲ ὁ  $A$  τὸν  $Z$ · μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ  $H$  τὸν  $B$ . Μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν  $\Theta$ . Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὁ  $\Theta$  τῷ  $A$  οὐκ ἐστὶν ὁ αὐτός, Καὶ ἐπεὶ ὁ  $H$  τὸν  $B$  μετρεῖ κατὰ τὸν  $\Theta$ · ὁ  $H$  ἄρα τὸν  $\Theta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ  $A$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $\Theta$   $H$  ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ  $A$  τετραγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ  $\Theta$  πρὸς τὸν  $A$ , ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $H$ . Μετρεῖ δὲ ὁ  $A$  τὸν  $H$ · μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ  $\Theta$  τὸν  $A$ , πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος, ὁ  $\Delta$ , ὑφ' ἑτέρου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, παρὲκ τῶν  $A$   $B$   $\Gamma$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ.

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων 14. ἀριθμῶν μετρηῇται· ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, παρὲκ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ἐλάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ  $A$  ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν  $B$   $\Gamma$   $\Delta$  μετρεῖσθω· λέγω ὅτι ὁ  $A$  ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, παρὲκ τῶν  $B$   $\Gamma$   $\Delta$ . Fig. 14.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ  $E$ , καὶ ὁ  $E$  μηδενὶ τῶν  $B$   $\Gamma$   $\Delta$  ἔστω ὁ αὐτός. Καὶ

ἐπεὶ ὁ  $E$  τὸν  $A$  μετρεῖ, μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν  $Z$ . ὁ  $E$  ἄρα τὸν  $Z$  πολλαπλασιάσας τὸν  $A$  πεποίηκε. Καὶ μετρεῖται ὁ  $A$  ὑπὸ τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῶν  $B$   $\Gamma$   $\Delta$ . Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμὸς· καὶ ἓνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει· οἱ  $B$   $\Gamma$   $\Delta$  ἄρα ἓνα τῶν  $E$   $Z$  μετρήσουσι. Τὸν μὲν οὖν  $E$  οὐ μετρήσουσιν, ὁ γὰρ  $E$  πρῶτός ἐστι, καὶ οὐδενὶ τῶν  $B$   $\Gamma$   $\Delta$  ὁ αὐτός· τὸν  $Z$  ἄρα μετρήσουσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ  $A$ , ὅπερ ἀδύνατον, ὁ γὰρ  $A$  ὑπόκειται ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν  $B$   $\Gamma$   $\Delta$  μετρούμενος· οὐκ ἄρα τὸν  $A$  μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς, παρὲκ τῶν  $B$   $\Gamma$   $\Delta$ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιε.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν 15. ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

Ἐστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι Fig. 15. τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ  $A$   $B$   $\Gamma$ . λέγω ὅτι τῶν  $A$   $B$   $\Gamma$  δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν, οἱ μὲν  $A$   $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ , οἱ δὲ  $B$   $\Gamma$  πρὸς τὸν  $A$ , καὶ ἔτι οἱ  $\Gamma$   $A$  πρὸς τὸν  $B$ .

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων ταῖς  $A$   $B$   $\Gamma$  δύο οἱ  $\Delta E$   $E Z$ . Φανερόν δὴ ὅτι ὁ μὲν  $\Delta E$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $A$  πεποίηκε, τὸν δὲ  $E Z$  πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποίηκε, καὶ ἔτι ὁ  $E Z$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ οἱ  $\Delta E$   $E Z$  ἐλάχιστοί εἰσι· πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσι, καὶ συναμφοτέρος πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ  $\Delta Z$  ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν  $\Delta E$   $E Z$  πρῶτός ἐστιν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ  $\Delta E$

πρὸς τὸν  $EZ$  πρῶτός ἐστιν· οἱ  $AZ$   $AE$  ἄρα πρὸς τὸν  $EZ$  πρῶτοί εἰσιν. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινὰ ἀριθμὸν πρῶτοι ᾖσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὁ ἐκ τῶν  $ZA$   $AE$  ἄρα πρὸς τὸν  $EZ$  πρῶτός ἐστιν· ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν  $ZA$   $AE$  πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ  $EZ$  πρῶτός ἐστιν. Ἐὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, ὁ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν. Ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν  $ZA$   $AE$  ὁ ἀπὸ τοῦ  $AE$  ἐστὶ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν  $AE$   $EZ$ · ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ  $AE$  μετὰ τοῦ ἐκ τῶν  $AE$   $EZ$  πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ  $EZ$  πρῶτός ἐστι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ  $AE$  ὁ  $A$ , ὁ δὲ ἐκ τῶν  $AE$   $EZ$  ὁ  $B$ , ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ  $EZ$  ὁ  $\Gamma$ · οἱ  $A$   $B$  ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν  $\Gamma$  πρῶτοί εἰσιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ  $B$   $\Gamma$  πρὸς τὸν  $A$  πρῶτοί εἰσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ οἱ  $A$   $\Gamma$  πρὸς τὸν  $B$  πρῶτοί εἰσιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ  $AZ$  πρὸς ἑκάτερον τῶν  $AE$   $EZ$  πρῶτός ἐστιν· καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ  $AZ$  πρὸς τὸν ἐκ τῶν  $AE$   $EZ$  πρῶτός ἐστιν. Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ  $AZ$  ἴσοι εἰσιν οἱ ἀπὸ τῶν  $AE$   $EZ$  μετὰ τοῦ δις ἐκ τῶν  $AE$   $EZ$ · καὶ οἱ ἀπὸ τῶν  $AE$   $EZ$  ἄρα μετὰ τοῦ δις ἐκ τῶν  $AE$   $EZ$  πρὸς τὸν ἐκ τῶν  $AE$   $EZ$  πρῶτοί εἰσι. Διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν  $AE$   $EZ$  μετὰ τοῦ ἅπαξ ἐκ τῶν  $AE$   $EZ$  πρὸς τὸν ἐκ τῶν  $AE$   $EZ$  πρῶτοί εἰσιν· ἔτι διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν  $AE$   $EZ$  ἄρα πρὸς τὸν ἐκ τῶν  $AE$   $EZ$  πρῶτοί εἰσι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ  $AE$  ὁ  $A$ , ὁ δὲ ἐκ τῶν  $AE$   $EZ$  ὁ  $B$ , ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ  $EZ$  ὁ  $\Gamma$ · οἱ  $A$   $\Gamma$  ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν  $B$  πρῶτοί εἰσι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

#### Πρότασις ιε΄.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλή- 16.  
λους ᾖσιν· οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν  
δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.



Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ  $A$   $B$  πρῶτοι πρὸς ἀλλή- Fig. 16.  
λους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἐστὶν ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  
 $B$ , οὕτως ὁ  $B$  πρὸς ἄλλον τινά.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ , οὕ-  
τως ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ . Οἱ δὲ  $A$   $B$  πρῶτοι, οἱ δὲ  
πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ με-  
τροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὃ τε  
ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπό-  
μενον· μετρεῖ ἄρα ὁ  $A$  τὸν  $B$ · μετρεῖ δὲ καὶ ἐαυτόν·  
ὁ  $A$  ἄρα τοὺς  $A$   $B$  μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς  
ἀλλήλους, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ  $A$  πρὸς  
τὸν  $B$ , οὕτως ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ιζ.

Ἐὰν ὥσιν ὅσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς 17.  
ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς  
ἀλλήλους ὥσιν· οὐκ ἐστὶν ὡς ὁ πρῶτος πρὸς  
τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον  
τινά.

Ἐστωσαν ὅσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, Fig. 17.  
οἱ  $A$   $B$   $\Gamma$   $\Delta$ , οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ  $A$   $\Delta$  πρῶτοι πρὸς  
ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἐστὶν ὡς ὁ  $A$  πρὸς  
τὸν  $B$ , οὕτως ὁ  $\Delta$  πρὸς ἄλλον τινά.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ , οὕ-  
τως ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $E$ · ἐναλλάξ ἄρα ὡς ὁ  $A$  πρὸς  
τὸν  $\Delta$ , ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $E$ . Οἱ δὲ  $A$   $\Delta$  πρῶτοι, οἱ  
δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ με-  
τροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις,  
ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος  
τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ  $A$  τὸν  $B$ . Καὶ ἐστὶν  
ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ , ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ · καὶ ὁ  $B$   
ἄρα τὸν  $\Gamma$  μετρεῖ, ὥστε καὶ ὁ  $A$  τὸν  $\Gamma$  μετρεῖ.  
Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ , ὁ  $\Gamma$  πρὸς τὸν  
 $\Delta$ ,

$\Delta$ , μετρεῖ δὲ ὁ  $B$  τὸν  $\Gamma$ . μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ  $\Gamma$  τὸν  $\Delta$ . Ἀλλ' ὁ  $A$  τὸν  $\Gamma$  μετρεῖ. ὥστε καὶ τὸν  $\Delta$  μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν. ὁ  $A$  ἄρα τοὺς  $A \Delta$  μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶ ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ , οὕτως ὁ  $\Delta$  πρὸς ἄλλον τινά. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ηῡ.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, 18.  
εἰ δυνατόν ἐστὶν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον  
προσευρεῖν.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ  $A B$ . καὶ Fig. 18.  
δέον ἐστὶ ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστὶν αὐτοῖς  
τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Οἱ δὴ  $A B$  ἦτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν,  
ἢ οὐ. Εἰ μὲν οὖν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, δέ-  
δεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον  
προσευρεῖν.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν οἱ  $A B$  πρῶτοι πρὸς ἀλ-  
λήλους, καὶ ὁ  $B$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  ποι-  
εῖτω. Ὁ  $A$  δὴ τὸν  $\Gamma$  ἦτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ.  
Μετρεῖτω πρότερον κατὰ τὸν  $\Delta$ . ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $\Delta$   
πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ  
ὁ  $B$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν. ὁ ἄρα  
ἐκ τῶν  $A \Delta$  ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ  $B$ . ἐστὶν ἄρα ὡς  
ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ , ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Delta$ . τοῖς  $A B$  ἄρα  
τρίτος ἀριθμὸς ἀνάλογον προσεύρηται, ὁ  $\Delta$ .

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρεῖτω ὁ  $A$  τὸν  $\Gamma$ . λέγω ὅτι  
τοῖς  $A B$  ἀδύνατόν ἐστι τρίτον ἀνάλογον προσ-  
ευρεῖν ἀριθμόν. Εἰ γὰρ δυνατόν. προσευρήσθω ὁ  $\Delta$ .  
ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $A \Delta$  ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ  $B$ , ὁ δὲ  
ἀπὸ τοῦ  $B$  ἐστὶν ὁ  $\Gamma$ . ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $A \Delta$  ἴσος  
ἐστὶ τῷ  $\Gamma$ . ὥστε ὁ  $A$  τὸν  $\Delta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$

πεποίηκεν· ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $\Gamma$  μετρεῖ κατὰ τὸν  $\Delta$ . Ἀλλὰ μὴν ὑπόκειται καὶ μὴ μετρῶν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς  $A B$  τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμὸν, ὅταν ὁ  $A$  τὸν  $\Gamma$  μὴ μετρῇ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Πρότασις ιθ'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστὶν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. 19.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ  $A B \Gamma$ , καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστὶν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. Fig. 19.

Οἱ δὴ  $A B \Gamma$  ἤτοι ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ  $A \Gamma$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν· ἢ οὐ.

Εἰ μὲν οὖν οἱ  $A B \Gamma$  ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ  $A \Gamma$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, δέδεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμὸν.

Εἰ δὲ οὐ, ὁ  $B$  τὸν  $\Gamma$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  ποιείτω· ὁ δὴ  $A$  τὸν  $\Delta$  ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖτω πρότερον κατὰ τὸν  $E$ · ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $E$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ  $B$  τὸν  $\Gamma$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $A E$  ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν  $B \Gamma$ · ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ , ὁ  $\Gamma$  πρὸς τὸν  $E$ · τοῖς  $A B \Gamma$  ἄρα τέταρτος ἀνάλογον προσεύρηται ὁ  $E$ .

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρεῖτω ὁ  $A$  τὸν  $\Delta$ · λέγω ὅτι ἀδύνατόν ἐστι τοῖς  $A B \Gamma$  τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ δυνατόν προσευρήσθω ὁ  $E$ · ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $A E$  ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν  $B \Gamma$ . Ἀλλ'

ὁ ἐκ τῶν  $B \Gamma$  ἐστὶν ὁ  $\Delta$ . καὶ ὁ ἐκ τῶν  $A E$  ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ  $\Delta$ . ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $E$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποίηκεν. ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $\Delta$  μετρεῖ κατὰ τὸν  $E$ . ὥστε μετρεῖ ὁ  $A$  τὸν  $\Delta$ . Ἀλλὰ καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς  $A B \Gamma$  τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμὸν, ὅταν ὁ  $A$  τὸν  $\Delta$  μὴ μετῇ.

### Πρότασις κ'.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παν- 20.  
τὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων  
ἀριθμῶν.

Ἐστῶσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ, οἱ  $A$  Fig. 20.  
 $B \Gamma$ . λέγω ὅτι τῶν  $A B \Gamma$  πλείους εἰσὶ πρῶτοι  
ἀριθμοί.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν  $A B \Gamma$  ἐλάχιστος  
μετρούμενος, καὶ ἔστω ὁ  $\Delta E$ , καὶ προσκείσθω τῷ  $\Delta E$   
μονὰς ἢ  $\Delta Z$ . ὁ δὴ  $EZ$  ἥτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ οὐ.  
Ἐστω πρότερον πρῶτος. εὐρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι  
ἀριθμοὶ οἱ  $A B \Gamma EZ$  πλείους τῶν  $A B \Gamma$ .

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ  $EZ$  πρῶτος. ὑπὸ πρώτου  
ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Μετρείσθω ὑπὸ πρώ-  
του τοῦ  $H$ . λέγω ὅτι ὁ  $H$  οὐδενὶ τῶν  $A B \Gamma$  ἐστὶν  
ὁ αὐτός. Εἰ γὰρ ὁ  $H$  ἐνὶ τῶν  $A B \Gamma$  ἐστὶν ὁ αὐτός,  
οἱ δὲ  $A B \Gamma$  τὸν  $\Delta E$  μετροῦσι. καὶ ὁ  $H$  ἄρα τὸν  
 $\Delta E$  μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν  $EZ$ . καὶ λοιπὴν  
ἄρα τὴν  $\Delta Z$  μονάδα μετρήσει ὁ  $H$ , ἀριθμὸς ὢν, ὅπερ  
ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ  $H$  ἐνὶ τῶν  $A B \Gamma$  ἐστὶν ὁ αὐ-  
τός. Καὶ ὑπόκειται πρῶτος. εὐρημένοι ἄρα εἰσὶ  
πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους  
τῶν  $A B \Gamma$ , οἱ  $A B \Gamma H$ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις κα.

Ἐάν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὅποσοιούν συντε- 21.  
θῶσιν, ὁ ὅλος ἀρτιός ἐστι.

Συγκείσθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὅποσοιούν, Fig. 21.  
οἱ  $AB$   $BΓ$   $ΓΔ$   $ΔΕ$ . λέγω ὅτι ὁλος ὁ  $ΑΕ$  ἀρτιός  
ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν  $AB$   $BΓ$   $ΓΔ$   $ΔΕ$  ἀρτιός  
ἐστιν, ἔχει μέρος ἡμισυ· ὥστε καὶ ὁλος ὁ  $ΑΕ$  ἔχει  
μέρος ἡμισυ. Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαι-  
ρούμενος· ἀρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ  $ΑΕ$ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις κβ.

Ἐάν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅποσοιούθ συντε- 22.  
θῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾗ· ὁ ὅλος  
ἄρτιος ἐσται.

Συγκείσθωσαν γὰρ περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅσοιδηπο- Fig. 22.  
τοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος, οἱ  $AB$   $BΓ$   $ΓΔ$   $ΔΕ$ . λέγω  
ὅτι ὁλος ὁ  $ΑΕ$  ἀρτιός ἐστιν,

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν  $AB$   $BΓ$   $ΓΔ$   $ΔΕ$  περι-  
τός ἐστιν, ἀφαιρεθείσης μονάδος ἀφ' ἑκάστου, ἕκασ-  
τος τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἐσται· ὥστε καὶ ὁ συγκείμε-  
νος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἐσται, Ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος  
τῶν μονάδων ἄρτιον· καὶ ὁλος ἄρα ὁ  $ΑΕ$  ἀρτιός  
ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις κγ.

Ἐάν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅποσοιούν συντε- 23.  
θῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾗ· καὶ  
ὁ ὅλος περισσὸς ἐσται.

Συγκείσθωσαν γὰρ ὅποσοιούν περισσοὶ ἀριθμοὶ, Fig. 23.  
ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστω, οἱ  $AB$   $BΓ$   $ΓΔ$ . λέγω  
ὅτι καὶ ὁλος ὁ  $ΑΔ$  περισσός ἐστιν.

Ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ  $ΓΔ$  μονὰς ἡ  $ΔΕ$ . λοιπὸς  
ἄρα ὁ  $ΓΕ$  ἀρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ὁ  $ΓΑ$  ἀρτιος

καὶ ὅλος ἄρα ὁ  $AE$  ἄρτιός ἐστι. Καὶ ἐστὶν ἡ μονὰς ἢ  $ΔΕ$ · περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ  $ΑΔ$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κδ.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαι- 24.  
ρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ  $AB$  ἀφηρήσθω ἄρτιος ὁ Fig. 24.  
 $BΓ$ · λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ  $ΓΑ$  ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ  $AB$  ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἡμισυ.  
Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ  $BΓ$  ἔχει μέρος ἡμισυ· ὥστε  
καὶ λοιπὸς ὁ  $ΓΑ$  ἔχει μέρος ἡμισυ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν  
ὁ  $ΑΓ$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κε.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαι- 25.  
ρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ  $AB$  περισσὸς ἀφηρήσθω Fig. 25.  
ὁ  $BΓ$ · λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ  $ΓΑ$  περισσὸς ἐστὶν.

Ἀφηρήσθω γὰρ ἀπὸ τοῦ  $BΓ$  μονὰς ἢ  $ΓΔ$ · ὁ  
 $ΔB$  ἄρα ἄρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ὁ  $AB$  ἄρτιος·  
καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ  $ΑΔ$  ἄρτιός ἐστι. Καὶ ἐστὶ μονὰς  
ἢ  $ΓΔ$ · ὁ  $ΓΑ$  ἄρα περισσὸς ἐστὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κς.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς 26.  
ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ  $AB$  περισσὸς ἀφηρήσθω Fig. 26.  
ὁ  $BΓ$ · λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ  $ΓΑ$  ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ  $AB$  περισσὸς ἐστὶν, ἀφηρήσθω μο-  
νὰς ἢ  $BΔ$ · λοιπὸς ἄρα ὁ  $ΑΔ$  ἄρτιός ἐστι. Διὰ τὰ  
αὐτὰ δὴ καὶ ὁ  $ΓΔ$  ἄρτιός ἐστιν· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ  
 $ΓΑ$  ἄρτιός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις κζ.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαι- 27.  
ρεθῇ· ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ ἀριθμοῦ τοῦ  $AB$  ἄρτιος Fig. 27.  
ἀφηρέσθω ὁ  $BΓ$ · λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ  $ΓΑ$  περισσὸς  
ἐστίν.

Ἀφηρέσθω γὰρ μονὰς ἡ  $ΑΔ$ · ὁ  $AB$  ἄρα ἄρτιός  
ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ὁ  $BΓ$  ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα  
ὁ  $ΓΔ$  ἄρτιός ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ μονὰς ἡ  $ΔΑ$ · πε-  
ρισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ  $ΓΑ$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις κη.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλα- 28.  
πλασιάσας ποιῇ τινα· ὁ γενόμενος ἄρτιος  
ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ  $A$  ἄρτιον τὸν  $B$  πολ- Fig. 28.  
λαπλασιάσας τὸν  $Γ$  ποιεῖτω· λέγω ὅτι ὁ  $Γ$  ἄρτιός  
ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ  $A$  τὸν  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $Γ$   
πεποίηκεν· ὁ  $Γ$  ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ  
 $B$ , ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ  $A$  μονάδες. Καὶ ἔστιν ὁ  $B$  ἄρ-  
τιος· ὁ  $Γ$  ἄρα σύγκειται ἐξ ἄρτίων. Ἐὰν δὲ ἄρτιοι  
ἀριθμοὶ ὅποιοι ὦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστίν·  
ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ  $Γ$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Πρότασις κθ.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθ- 29.  
μὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα· ὁ γενόμε-  
νος περισσὸς ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ  $A$  περισσὸν τὸν  $B$  πολ- Fig. 29.  
λαπλασιάσας τὸν  $Γ$  ποιεῖτω· λέγω ὅτι ὁ  $Γ$  περισσὸς  
ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ  $A$  τὸν  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $Γ$   
πεποίηκεν· ὁ  $Γ$  ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ

$B$ , ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ  $A$  μονάδες. Καὶ ἔστιν ἐκάτερος τῶν  $A$   $B$  περισσός· ὁ  $\Gamma$  ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν· ὥστε ὁ  $\Gamma$  περισσός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν 30. μετρῇ. καὶ τὸν ἡμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Περὶσσοῦ γὰρ ἀριθμοῦ ὁ  $A$  ἄρτιον τὸν  $B$  με- Fig. 30. τρεῖτω· λέγω ὅτι καὶ τὸν ἡμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ  $A$  τὸν  $B$  μετρεῖ, μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν  $\Gamma$ · λέγω ὅτι ὁ  $\Gamma$  οὐκ ἐστὶ περισσός. Εἰ γὰρ δυνατόν· ἔστω. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $A$  τὸν  $B$  μετρεῖ κατὰ τὸν  $\Gamma$ · ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $\Gamma$  πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποιήκεν· ὁ  $B$  ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν· ὁ  $B$  ἄρα περισσός ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ἄρτιος· οὐκ ἄρα ὁ  $\Gamma$  περισσός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ  $\Gamma$ · ὥστε ὁ  $A$  τὸν  $B$  μετρεῖ ἀρτιάκις, διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὸν ἡμισυν αὐτοῦ μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λ.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρὸς τινὰ ἀριθ- 31. μὸν πρῶτος ᾗ· καὶ πρὸς τὸν διπλασίονα αὐτοῦ πρῶτος ἔσται.

Περὶσσοῦ γὰρ ἀριθμοῦ ὁ  $A$  πρὸς τινὰ ἀριθμὸν Fig. 31. τὸν  $B$  πρῶτος ἔστω, τοῦ δὲ  $B$  διπλασίου· ἔστω ὁ  $\Gamma$ · λέγω ὅτι ὁ  $A$  καὶ πρὸς τὸν  $\Gamma$  πρῶτός ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ  $A$   $\Gamma$  πρῶτοι, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ  $\Delta$ . Καὶ ἔστιν ὁ  $A$  περισσός· περισσὸς ἄρα καὶ ὁ  $\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ ὁ  $\Delta$  περισσὸς ὦν τὸν  $\Gamma$  μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὁ  $\Gamma$  ἄρτιος· καὶ τὸν ἡμισυν ἄρα τοῦ  $\Gamma$  μετρήσει ὁ  $\Delta$ . Τοῦ δὲ  $\Gamma$  ἡμισύς ἐστιν ὁ  $B$ · ὁ  $\Delta$  ἄρα τὸν  $B$  μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν  $A$ · ὁ  $\Delta$  ἄρα τοὺς  $A$   $B$  μετρεῖ πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν



ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $\Gamma$  πρῶτος οὐκ ἐστίν· οἱ  $A$   $\Gamma$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιβ.

Τῶν ἀπὸ δυνάδος διπλασιοζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. 32.

Ἀπὸ γὰρ δυνάδος τῆς  $A$  δεδιπλασιάσθωσαν ὅσοι- Fig. 32.  
δηποτοῦν ἀριθμοὶ, οἱ  $B$   $\Gamma$   $\Delta$ · λέγω ὅτι οἱ  $B$   $\Gamma$   $\Delta$  ἀρτιάκις ἄρτιοί εἰσι μόνον.

Ὅτι μὲν οὖν ἕκαστος τῶν  $B$   $\Gamma$   $\Delta$  ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι, φανερόν· ἀπὸ γὰρ δυνάδος ἐστὶ διπλασιασθείς. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μόνον. Ἐκκείσθω γὰρ μονὰς ἡ  $E$ . Ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ  $A$  πρῶτός ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν  $A$   $B$   $\Gamma$   $\Delta$ , ὁ  $\Delta$ , ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν  $A$   $B$   $\Gamma$ . Καὶ ἐστὶν ἕκαστος τῶν  $A$   $B$   $\Gamma$  ἄρτιος· ὁ  $\Delta$  ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. Ὅμοίως δὲ δείξομεν ὅτι ἑκάτερος τῶν  $B$   $\Gamma$  ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ.

Ἐὰν ἀριθμὸς τὸν ἡμισυν ἔχη περισσόν· 33.  
ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ  $A$  τὸν ἡμισυν ἐχέτω περισσόν· Fig. 33.  
λέγω ὅτι ὁ  $A$  ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

Ὅτι μὲν οὖν ἀρτιάκις περισσός ἐστι, φανερόν· ὁ γὰρ ἡμισυς αὐτοῦ περισσὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν ἀρτιάκις. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μόνον. Εἰ γὰρ ἔσται ὁ  $A$  καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος, μετρηθήσεται ὑπὲρ ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· ὥστε καὶ ὁ ἡμισυς αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπὲρ ἀρτίου ἀριθμοῦ, περισσὸς ὢν, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· ὁ  $A$  ἄρα ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λδ.

Ἐὰν ἄρτιος ἀριθμὸς μήτε τῶν ἀπὸ δυνά- 34.  
δος διπλασιαζομένων ἢ, μήτε τὸν ἡμισυν  
ἔχῃ περισσόν· ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ  
ἀρτιάκις περισσός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ  $A$  μήτε τῶν ἀπὸ δυνάδος διπλα- Fig. 34.  
σιαζομένων ἔστω, μήτε τὸν ἡμισυν ἔχέτω περισσόν·  
λέγω ὅτι ὁ  $A$  ἀρτιάκις τε ἐστὶν ἄρτιος, καὶ ἀρτιάκις  
περισσός.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ  $A$  ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανε-  
ρόν· τὸν γὰρ ἡμισυν οὐκ ἔχει περισσόν, λέγω δὴ  
ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. Ἐὰν γὰρ τὸν  $A$   
τέμνωμεν δίχα, καὶ τὸν ἡμισυν αὐτοῦ δίχα, καὶ τοῦ-  
το αἰ ποιωμεν, καταντήσομεν εἰς τινὰ ἀριθμὸν πε-  
ρισσόν, ὃς μετρήσει τὸν  $A$  κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.  
Εἰ γὰρ οὐ· καταντήσομεν εἰς δυνάδα, καὶ ἔσται ὁ  $A$   
τῶν ἀπὸ δυνάδος διπλασιαζομένων, ὅπερ οὐχ ὑπόκει-  
ται· ὥστε ὁ  $A$  ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ  
καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος· ὁ  $A$  ἄρα ἀρτιάκις τε ἄρτιός  
ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λε.

Ἐὰν ὥσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς 35.  
ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπὸ τε τοῦ δευ-  
τέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου ἴσοι τῷ πρώτῳ· ἔσται  
ὥς ἢ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶ-  
τον, οὕτως ἢ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς  
πρὸ αὐτοῦ πάντας.

Ἐστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον Fig. 35.  
οἱ  $A$   $B\Gamma$   $\Delta$   $EZ$ , ἀρχόμενοι ὑπὸ ἐλαχίστου τοῦ  $A$ ,  
καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ  $B\Gamma$  καὶ τοῦ  $EZ$  τῷ  $A$  ἴσος,  
ἐκάτερος τῶν  $H\Gamma$   $Z\Theta$ · λέγω ὅτι ἐστὶν ὥς ὁ  $B\Gamma$   
πρὸς τὸν  $A$ , οὕτως ὁ  $E\Theta$  πρὸς τοὺς  $A$   $B\Gamma$   $\Delta$ .

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν  $B\Gamma$  ἴσος ὁ  $ZK$ , τῷ δὲ  $\Delta$

ἴσος ὁ  $Z\Lambda$ . Καὶ ἐπεὶ ὁ  $ZK$  τῷ  $B\Gamma$  ἴσος ἐστίν, ὥν ὁ  $Z\Theta$  τῷ  $H\Gamma$  ἴσος· λοιπὸς ἄρα ὁ  $\Theta K$  λοιπῷ τῷ  $H\Lambda$  ἐστὶν ἴσος. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ  $EZ$  πρὸς τὸν  $\Lambda$ , οὕτως ὁ  $\Lambda$  πρὸς τὸν  $B\Gamma$ , καὶ ὁ  $B\Gamma$  πρὸς τὸν  $A$ , ἴσος δὲ ὁ μὲν  $\Lambda$  τῷ  $Z\Lambda$ , ὁ δὲ  $B\Gamma$  τῷ  $ZK$ , ὁ δὲ  $A$  τῷ  $Z\Theta$ · ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ  $EZ$  πρὸς τὸν  $\Lambda Z$ , οὕτως ὁ  $\Lambda Z$  πρὸς τὸν  $ZK$ , καὶ ὁ  $KZ$  πρὸς τὸν  $Z\Theta$ · διελόντι, ὡς ὁ  $E\Lambda$  πρὸς τὸν  $\Lambda Z$ , οὕτως ὁ  $\Lambda K$  πρὸς τὸν  $ZK$ , καὶ ὁ  $K\Theta$  πρὸς τὸν  $Z\Theta$ · ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς εἰς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἐπομένους· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ  $K\Theta$  πρὸς τὸν  $Z\Theta$ , οὕτως οἱ  $E\Lambda$   $\Lambda K$   $K\Theta$  πρὸς τοὺς  $\Lambda Z$   $KZ$   $\Theta Z$ . Ἴσος δὲ ὁ μὲν  $K\Theta$  τῷ  $BH$ , ὁ δὲ  $Z\Theta$  τῷ  $A$ , οἱ δὲ  $\Lambda Z$   $KZ$   $Z\Theta$  τοῖς  $\Lambda$   $B\Gamma$   $A$ · ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ  $BH$  πρὸς τὸν  $A$ , οὕτως ὁ  $E\Theta$  πρὸς τοὺς  $\Lambda$   $B\Gamma$   $A$ · ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας· ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

### Πρότασις λς.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοι οὖν ἀριθμοὶ 36.  
ἐξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ,  
ἕως οὗ ὁ σύμπαρ συντεθεὶς πρῶτος γένηται,  
καὶ ὁ σύμπαρ ἐπὶ τὸν ἐσχάτον πολλαπλασια-  
σθεὶς ποιῇ τινα· ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὅποσοι οὖν ἀριθμοὶ Fig. 36.  
ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπαρ συν-  
τεθεὶς πρῶτος γένηται, οἱ  $A$   $B$   $\Gamma$   $\Delta$ , καὶ τῷ σύμ-  
παντι ἴσος ἔστω ὁ  $E$ , καὶ ὁ  $E$  τὸν  $\Delta$  πολλαπλασιάσας  
τὸν  $ZH$  ποιεῖτω. λέγω ὅτι ὁ  $ZH$  τέλειός ἐστιν.

Ὅσοι γὰρ εἰσιν οἱ  $A$   $B$   $\Gamma$   $\Delta$  τῷ πλήθει, τοσοῦ-  
τοι ἀπὸ τοῦ  $E$  εἰλήφθωσαν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλο-  
γίᾳ, οἱ  $E$   $\Theta K$   $\Lambda$   $M$ · διῶσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ  $A$  πρὸς  
τὸν  $\Delta$ , οὕτως ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $M$ · ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $E$   $\Delta$   
ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν  $A$   $M$ . Καὶ ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν  $E$

$\Delta$  ὁ  $ZH$ . καὶ ὁ ἐκ τῶν  $A M$  ἄρα ἐστὶν ὁ  $ZH$ . ὁ  $A$   
 ἄρα τὸν  $M$  πολλαπλασιάσας τὸν  $ZH$  πεποίηκεν. ὁ  
 $M$  ἄρα τὸν  $ZH$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $A$  μονάδας.  
 Καὶ ἐστὶ δυνὰς ὁ  $A$ . διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ  $ZH$  τοῦ  
 $M$ . Εἰσὶ δὲ καὶ οἱ  $M A \Theta K E$  ἐξῆς διπλάσιοι ἀλ-  
 λήλων. οἱ  $E \Theta K A M ZH$  ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν  
 ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ. Ἀφηρήσθω δὴ ἀπὸ τοῦ  
 δευτέρου τοῦ  $\Theta K$  καὶ τοῦ ἐσχάτου τοῦ  $ZH$  τῷ πρῶ-  
 τῷ τῷ  $E$  ἴσος, ἐκάτερος τῶν  $\Theta N Z\Xi$ . ἐστὶν ἄρα ὡς  
 ἡ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον,  
 οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἐαυτοῦ  
 πάντας. ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ  $NK$  πρὸς τὸν  $E$ , οὕτως ὁ  
 $\Xi H$  πρὸς τοὺς  $M A \Theta K E$ . Καὶ ἐστὶν ὁ  $NK$  ἴσος  
 τῷ  $E$ . καὶ ὁ  $\Xi H$  ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς  $M A \Theta K E$ .  
 Ἔστι δὲ καὶ ὁ  $\Xi Z$  τῷ  $E$  ἴσος, ὁ δὲ  $E$  τοῖς  $A B \Gamma$   
 $\Delta$  καὶ τῇ μονάδι. ὅλος ἄρα ὁ  $ZH$  ἴσος ἐστὶ τοῖς τε  
 $E \Theta K A M$  καὶ τοῖς  $A B \Gamma \Delta$  καὶ τῇ μονάδι, καὶ  
 μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. Λέγω ὅτι καὶ ὁ  $ZH$  ὑπ' οὐδε-  
 νὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν  $A B \Gamma \Delta E$   
 $\Theta K A M$  καὶ τῆς μονάδος. Εἰ γὰρ δυνατόν, με-  
 τρέιτω τις τὸν  $ZH$  ὁ  $O$ , καὶ ὁ  $O$  μηδενὶ τῶν  $A B$   
 $\Gamma \Delta E \Theta K A M$  ἔστω ὁ αὐτός. Καὶ ὅσάκις ὁ  $O$   
 τὸν  $ZH$  μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ  $\Pi$ .  
 ὁ  $\Pi$  ἄρα τὸν  $O$  πολλαπλασιάσας τὸν  $ZH$  πεποίηκεν.  
 Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ  $E$  τὸν  $\Delta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $ZH$   
 πεποίηκεν. ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $\Pi$ , ὁ  $O$  πρὸς  
 τὸν  $\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ  
 $A B \Gamma \Delta$ , ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ  $A$  πρῶτός ἐστιν.  
 ὁ  $\Delta$  ἄρα ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται,  
 πάρεξ τῶν  $A B \Gamma$ . καὶ ὑπόκειται ὁ  $O$  οὐδενὶ τῶν  
 $A B \Gamma$  ὁ αὐτός. οὐκ ἄρα μετρήσει ὁ  $O$  τὸν  $\Delta$ . Ἀλλ'  
 ὡς ὁ  $O$  πρὸς τὸν  $\Delta$ , ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $\Pi$ . οὐδὲ ὁ  $E$  ἄρα  
 τὸν  $\Pi$  μετρεῖ. Καὶ ἐστὶν ὁ  $E$  πρῶτος. πᾶς δὲ πρῶ-  
 τος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ,

πρώτος ἐστίν· οἱ  $E$   $\Pi$  ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους  
 εἰσίν. Οἱ δὲ πρώτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι  
 μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις,  
 ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν  
 ἐπόμενον, καὶ ἔστιν ὡς ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $\Pi$ , ὁ  $O$  πρὸς  
 τὸν  $\Delta$ · ἰσάκεις ἄρα ὁ  $E$  τὸν  $O$  μετρεῖ καὶ ὁ  $\Pi$  τὸν  $\Delta$ .  
 Ὁ δὲ  $\Delta$  ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται, πᾶρεξ τῶν  $A$   
 $B$   $\Gamma$ · ὁ  $\Pi$  ἄρα ἐνὶ τῶν  $A$   $B$   $\Gamma$  ἐστὶν ὁ αὐτός. Ἐστὶν  
 τῷ  $B$  ὁ αὐτός. Καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ  $B$   $\Gamma$   $\Delta$  τῷ πλήθει  
 τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ  $E$ , οἱ  $E$   $\Theta$   $K$   $\Lambda$ . Καὶ  
 εἰσὶν οἱ  $E$   $\Theta$   $K$   $\Lambda$  τοῖς  $B$   $\Gamma$   $\Delta$  ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ·  
 διῶσον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Delta$ , ὁ  $E$  πρὸς τὸν  
 $\Lambda$ · ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $B$   $\Lambda$  ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν  $\Delta$   $E$ .  
 Ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν  $\Delta$   $E$  ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν  $\Pi$   $O$ · καὶ  
 ὁ ἐκ τῶν  $\Pi$   $O$  ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν  $B$   $\Lambda$ · ἔστιν  
 ἄρα ὡς ὁ  $\Pi$  πρὸς τὸν  $B$ , ὁ  $\Lambda$  πρὸς τὸν  $O$ . Καὶ ἔστιν  
 ὁ  $\Pi$  τῷ  $B$  ὁ αὐτός· καὶ ὁ  $\Lambda$  ἄρα τῷ  $O$  ἐστὶν ὁ αὐ-  
 τός, ὅπερ ἀδύνατον, ὁ γὰρ  $O$  ὑπόκειται μηδενὶ τῶν  
 ἐκκειμένων ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα τὸν  $ZH$  μετρεῖ τις ἀριθ-  
 μός, πᾶρεξ τῶν  $A$   $B$   $\Gamma$   $\Delta$   $E$   $\Theta$   $K$   $\Lambda$   $M$ , καὶ τῆς μονά-  
 δος. Καὶ ἐδείχθη ὁ  $ZH$  τοῖς  $A$   $B$   $\Gamma$   $\Delta$   $E$   $\Theta$   $K$   $\Lambda$   
 $M$ , καὶ τῇ μονάδι ἴσος· τέλειος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ  
 τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὢν· τέλειος ἄρα ἐστὶν ὁ  $ZH$ .  
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

# Appendix I.

## Demonstrationes alterae in editionibus Elementorum Euclidis hic illic adscriptae.

~~~~~

1.

Ad Lib. II. prop. 4.

Καὶ ἄλλως. (Ἑτέρα δεῖξις.)

Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν AG GB τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AG GB περιχομένῳ ὀρθογώνῳ.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BA τῇ AD , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABD τῇ ὑπὸ ADB · καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ τοῦ ABD ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ABD ADB BAD δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὄρθῃ δὲ ἡ ὑπὸ BAD , λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ABD ADB μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶ· καὶ εἰσὶν ἴσαι· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ABD ADB ἡμισυά ἐστιν ὀρθῆς. Ὄρθῃ δὲ ἡ ὑπὸ BGH , ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ A · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ GHB ἡμισυά ἐστὶν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ GHB γωνία τῇ ὑπὸ GBH · ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ BG τῇ GH ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν GB τῇ HK ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ GH τῇ BK · ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ GK . Ἐχει δὲ καὶ ὀρθὴν τὴν ὑπὸ GBK γωνίαν· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ GK , καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς GB . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ΘZ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς AG · τὰ ἄρα GK ΘZ τετράγωνα ἐστὶ, καὶ ἴσιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν AG GB . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AH τῷ HE , καὶ ἐστὶ τὸ AH τὸ ὑπὸ τῶν AG GB · ἴση γὰρ ἡ GH τῇ GB · καὶ τὸ EH ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AG GB · τὰ ἄρα AH HE ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AG GB . Ἔστι δὲ καὶ τὰ GK ΘZ ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν AG GB · τὰ ἄρα GK ΘZ AH HE ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν

$ΑΓ ΓΒ$ καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ ΓΒ$. Ἀλλὰ τὰ $ΓΚ ΘΖ$ καὶ τὰ $ΑΗ ΗΕ$ ὅλον ἐστὶ τὸ $ΑΕ$, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετράγωνον τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν $ΑΓ ΓΒ$ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ ΓΒ$ περιχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

2.

Ad Lib. III. prop. 7.

Ἡ καὶ οὕτως. Ἐπιζεύχθω ἡ $ΕΚ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΗΕ$ τῇ $ΕΚ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΕΖ$, καὶ βάσις ἡ $ΖΗ$ βάσει τῇ $ΖΚ$ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΗΕΖ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΚΕΖ$ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ $ΗΕΖ$ τῇ ὑπὸ $ΖΕΘ$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ $ΖΕΘ$ ἄρα τῇ ὑπὸ $ΚΕΖ$ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ $Ζ$ σημείου ἑτέρα τις προσπесεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ $ΗΖ$ · μία ἄρα μόνη. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

3.

Ad Lib. III. prop. 8.

Ἡ καὶ ἄλλως. Καὶ ἐπιζεύχθω ἡ $ΜΝ$. Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΚΜ$ τῇ $ΜΝ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΜΔ$, καὶ βάσις ἡ $ΔΚ$ βάσει τῇ $ΔΝ$ ἴση γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΚΜΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΝΜΔ$ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ $ΚΜΔ$ τῇ ὑπὸ $ΒΜΔ$ ἐστὶν ἴση καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΜΔ$ ἄρα τῇ ὑπὸ $ΝΜΔ$ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι πρὸς τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον ἀπὸ τοῦ $Δ$ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς $ΔΗ$ ἐλαχίστης προσπесοῦνται. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

4.

Ad Lib. III. prop. 9.

Ἄλλως.

Κύκλου γὰρ τοῦ $ΑΒγ$ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τὸ $Δ$, ἀπὸ δὲ τοῦ $Δ$ πρὸς τὸν $ΑΒγ$ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ $ΔΑ ΔΒ Δγ$ · λέγω ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον τὸ $Δ$ κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΒγ$ κύκλου.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ $ε$, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ $Δε$ διήχθω ἐπὶ τὰ $ζ$ · η σημεία, ἡ $ζη$ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ $ΑΒγ$ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ $ΑΒγ$ ἐπὶ τῆς $ζη$ διαμέτρου εἴληπται τι σημεῖον τὸ $Δ$, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, μέγιστη μὲν ἔσται ἡ $Δη$, μείζων δὲ ἡ μὲν $Δγ$ τῆς $ΔΒ$, ἡ δὲ $ΔΒ$ τῆς $ΔΑ$. Ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ $ε$ κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΒγ$

κύκλου. Ὅμοιως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Δ . τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\gamma$ κύκλου.

5.

Ad Lib. III. prop. 10.

Ἄλλως.

Κύκλος γὰρ πάλιν ὁ $AB\Gamma$ κύκλον τὸν ΔEZ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ $B H Z$, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου, τὸ κ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\kappa B \kappa H \kappa Z$.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΔEZ εἰληπταί τι σημεῖον ἐντὸς, τὸ κ , καὶ ἀπὸ τοῦ κ πρὸς τὸν ΔEZ κύκλον προσπεπτώκασιν πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, αἱ $\kappa B \kappa Z \kappa H$. τὸ κ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔEZ κύκλου. Ἔστι δὲ καὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου κέντρον τὸ κ . δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ κ , ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἐξῆς.

6.

Ad Lib. III. prop. 11.

Ἄλλως.

Ἀλλὰ δὴ πιπτέτω ὡς ἡ $HZ\Gamma$, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ $HZ\Gamma$ ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $AH AZ$.

Ἐπεὶ οὖν αἱ $AH HZ$ μέζουσιν εἰς τῆς AZ , ἀλλὰ ἡ ZA ἴση ἐστὶ τῇ $Z\Gamma$, τοῦτ' ἐστὶ τῇ $Z\Theta$, κοινὴ ἀφηγήσθω ἡ ZH . λοιπὴ ἄρα ἡ AH λοιπῆς τῆς $H\Theta$ μέζων ἐστίν, τοῦτ' ἐστὶν ἡ HA τῆς $H\Theta$, ἡ ἐλάττω τῆς μέζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ὅμοιως, καὶ ἐκτὸς ἡ τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ μέζονος κύκλου, δείξομεν τὸ αὐτὸ ἀτοπον.

7.

Ad Lib. III. prop. 31.

Ἄλλως.

(Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ $BA\Gamma$.) Ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AE\Gamma$ τῆς ὑπὸ BAE , ἴση γὰρ δυαὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AEB διπλὴ τῆς ὑπὸ EAG . αἱ ἄρα ὑπὸ AEB $AE\Gamma$ διπλασίονές εἰσι τῆς ὑπὸ $BA\Gamma$. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ AEB $AE\Gamma$ δυοὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ἡ ἄρα ὑπὸ $BA\Gamma$ ὀρθή ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ad Lib. VI. prop. 20.

Ἄλλως.

Δείξομεν δὴ καὶ ἑτέρως προχωρότερον ὁμόλογα τὰ τρίγωνα.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ $ABΓΔΕ$ $ZHΘΚΛ$ πολύγωνα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ BE $ΕΓ$ $ΗΔ$ $ΛΘ$. λέγω ὅτι ἔστιν ὥς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ $ZHΛ$, οὕτως τὸ $EBΓ$ πρὸς τὸ $ΛΗΘ$ καὶ τὸ $ΓΔΕ$ πρὸς τὸ $ΘΚΛ$.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίων ἐστὶ τὸ ABE τρίγωνον τῷ $ZHΛ$ τριγώνῳ, τὸ ABE ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ $ZHΛ$ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ BE πρὸς τὴν $ΗΔ$. Λιὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $BEΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΗΛΘ$ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ BE πρὸς τὴν $ΗΔ$. ἔστιν ἄρα ὥς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ $ZHΛ$ τρίγωνον, οὕτως τὸ $EBΓ$ πρὸς τὸ $ΛΗΘ$. Πάλιν, ἐπεὶ ὁμοίων ἐστὶ τὸ $EBΓ$ τρίγωνον τῷ $ΛΗΘ$ τριγώνῳ, τὸ $EBΓ$ ἄρα πρὸς τὸ $ΛΗΘ$ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $ΓΕ$ εὐθεΐα πρὸς τὴν $ΘΛ$. Λιὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $ΕΓΔ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΛΘΚ$ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΘΛ$. ἔστιν ἄρα ὥς τὸ $EBΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΛΗΘ$, οὕτως τὸ $ΕΓΔ$ πρὸς τὸ $ΛΘΚ$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὥς τὸ $EBΓ$ πρὸς τὸ $ΛΗΘ$, οὕτως τὸ ABE πρὸς τὸ $ZHΛ$. καὶ ὥς ἄρα τὸ ABE πρὸς τὸ $ZHΛ$, οὕτως τὸ $BEΓ$ πρὸς τὸ $ΗΛΘ$ καὶ τὸ $ΕΓΔ$ πρὸς τὸ $ΛΘΚ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Ad Lib. VI. prop. 30.

Ἄλλως.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεΐα ἡ AB . δεῖ δὴ τὴν AB εὐθεΐαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Τετμήσθω γὰρ ἡ AB κατὰ τὸ $γ$, ὥστε τὸ ἐπὶ τῶν AB By ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς $Aγ$ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ἐπὶ τῶν AB By ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $γA$. ἔστιν ἄρα ὥς ἡ AB πρὸς τὴν $Aγ$, οὕτως ἡ $Aγ$ πρὸς τὴν $γB$. Ἡ ἄρα AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ $γ$. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

10.

Ad Lib. VI. prop. 31.

Ἄλλως.

Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς $BΓ$ ἄρα εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BA εἶδος διπλασίονα

πλυσίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ $ΓΒ$ πρὸς τὴν $ΒΑ$. Ἐχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΑ$ τετράγωνον διπλᾶσιονα λόγον, ἥπερ ἡ $ΓΒ$ πρὸς τὴν $ΒΑ$ · καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΑ$ εἶδος, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΑ$ τετράγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὥς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΑ$ εἶδος, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΑ$ τετράγωνον· ὥστε καὶ ὥς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν $ΒΑ$ $ΑΓ$ εἶδη, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν $ΒΑ$ $ΑΓ$ τετράγωνα. Ἰσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν $ΒΑ$ $ΑΓ$ τετραγώνοις· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν $ΒΑ$ $ΑΓ$ εἶδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις· ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

11.

Ad. Lib. VII. prop. 33.

Ἄλλως.

Ἐστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ A , λέγω ὅτι ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ A , μετρηθήσεται ὑπὸ ἀριθμοῦ, καὶ ἔστω ἐλάχιστος τῶν μετρούντων αὐτὸν ὁ B . λέγω ὅτι ὁ B πρώτός ἐστιν. Εἰ γὰρ μὴ· σύνθετός ἐστιν, μετρηθήσεται ἄρα ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος. Μετρεῖσθω· καὶ ἔστω ὁ $Γ$ ὁ μετρῶν αὐτὸν· ὁ $Γ$ ἄρα τοῦ B ἐλάσσων ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ὁ $Γ$ τὸν B μετρῇ, ἀλλὰ καὶ ὁ B τὸν A μέτρει· καὶ ὁ $Γ$ ἄρα τὸν A μετρῇ, ἐλάσσων ὢν τοῦ B , ἐλάχιστου ὄντος τῶν μετρούντων· ὅπερ ἄτοπον. Οὐκ ἄρα ὁ B σύνθετος ἀριθμὸς ἐστὶ· πρώτος ἄρα· ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

Appendix II.

De claris mathematicis Graecorum ante
Euclidem et de vita et scriptis hujus
geometrae. (ex Proclo.)

~~~~~

Cum saepius disseratur de Graecorum in mathematicis disciplinis eruditione, multaue nomina clarorum virorum exhibeantur; pergratum me facturum putavi discentibus, si locum Procli exscriberem ex lib. II. ad Euclid. pag. 19. qui brevem quandam geometriae ante Euclidem continet historiam.

Παρ' Αἰγυπτίοις μὲν εὗρησθαι πρῶτον ἡ γεω- 1  
 μετρία παρὰ πολλῶν ἱστορεῖται ἐκ τῆς τῶν χωρίων  
 ἀναμετρήσεως λαβοῦσα τὴν γένεσιν. 1) Ἀναγκαῖα γὰρ  
 ἦν ἐκείνοις αὐτὴ διὰ τὴν ἄνοδον τοῦ Νείλου τοῦς  
 προσήκοντας ἐκάστοις ἀφανίζοντος ὄρους καὶ θαυ-  
 μαστὸν οὐδὲν, ἀπὸ τῆς χρείας ἄρξασθαι τὴν εὕρεσιν  
 καὶ ταύτης καὶ τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν. Ἐπειδὴ πᾶν  
 τὸ ἐν γενέσει φερόμενον ἀπὸ τοῦ ἀτελοῦς πρὸς τὸ  
 τέλειον πρόεισιν . . . . Ὡς περ οὖν παρὰ τοῖς Φοίνιξι  
 διὰ τὰς ἐμπορίας καὶ τὰ συναλλάγματα τὴν ἀρχὴν  
 ἔλαβεν ἡ τῶν ἀριθμῶν ἀκριβὴς γνῶσις, οὕτω δὴ καὶ  
 περὶ Αἰγυπτίοις ἡ γεωμετρία διὰ τὴν εἰρημένην αἰτίαν  
 εὕρηται. 2  
 Θαλῆς δὲ πρῶτον εἰς Αἴγυπτον ἐλθὼν  
 μετήγαγεν εἰς τὴν Ἑλλάδα τὴν θεωρίαν ταύτην· καὶ  
 πολλὰ μὲν αὐτὸς εὗρε, πολλῶν δὲ τὰς ἀρχὰς τοῖς  
 μετ' αὐτὸν ὑφηγήσατο, τοῖς μὲν καθολικώτερον ἐπι-  
 βαλλων τοῖς δὲ αἰσθητικώτερον. Μετὰ δὲ τοῦτον  
 Ἀμέριστος ὁ Στησιχόρου τοῦ ποιητοῦ ἀδελφός, ὡς 3  
 ἐφαψάμενος τῆς περὶ γεωμετρίας σπουδῆς μνημονεύε-  
 ται, καὶ Ἰππίας ὁ Ἡλεῖος ἱστόρησεν ὡς ἐπὶ γεωμε-  
 τρίας δόξαν αὐτοῦ λαβόντος. Ἐπὶ δὲ τούτοις Πυ- 4  
 θαγόρας τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα  
 παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς  
 αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ αὐλῶς καὶ νοερῶς τὰ θεω-  
 ρήματα διερευνῶμενος, ὅς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων  
 (alii ἀναλόγων) πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμι-  
 κῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρε. Μετὰ δὲ τοῦτον 5  
 Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομενίος πολλῶν ἐφήψατο  
 κατὰ γεωμετρίαν, καὶ Οἶνοπίδης ὁ Χῖος, 2)  
 ὀλίγω νεώτερος ὢν τοῦ Ἀναξαγόρου, ὢν καὶ ὁ  
 Πλάτων ἐν τοῖς ἀντερασταῖς ἐμνημόνευσεν ὡς ἐπὶ  
 τοῖς μαθήμασι δόξαν λαβόντων· ἐφ' οἷς Ἰππο-  
 κράτης ὁ Χῖος ὁ τὸν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισ- 6

μον εὐρῶν \*) καὶ Θεώδωρος \*) ὁ Κυρηναῖος ἐγένοντο  
 περὶ γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς· πρῶτος γὰρ ὁ Ἰπποκρά-  
 της τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψε·  
 Πλάτων δὲ ἐπὶ τούτου γενόμενος μεγίστην ἐποίησεν 7  
 ἐπίδοσιν τὰ τε ἄλλα μαθήματα καὶ τὴν γεωμετρίαν  
 λαβεῖν, διὰ τὴν περὶ αὐτὴν σπουδὴν, ὅσπερ δῆλός  
 ἐστι καὶ τὰ συγγράμματα τοῖς μαθηματικοῖς λόγοις  
 καταπυκνωσας καὶ πανταχοῦ τὸ περὶ αὐτὰ θαυμα-  
 στὸν φιλοσοφίας ἀντεχόμενον ἐπεγείρων. Ἐν δὲ τούτῳ  
 τῷ χρόνῳ καὶ Λεωδάμας ὁ Θάσιος ἦν καὶ Ἀρχύ- 8  
 τας \*) ὁ Ταραντῖνος καὶ Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος  
 παρ' ὧν ἐπηυξήθη τὰ θεωρήματα καὶ προήλθεν εἰς  
 ἐπιστημονικωτέραν σύστασιν. Λεωδάμαντος δὲ νεώ-  
 τερος ὁ Νεοκλείδης καὶ ὁ τούτου μαθητὴς Λέων,  
 οἱ πολλὰ προσεπόρισαν τοῖς πρὸ αὐτῶν, ὥστε τὸν  
 Λέοντα καὶ τὰ στοιχεῖα συνθεῖναι τῷ τε πλήθει καὶ  
 τῇ χρείᾳ τῶν δεικνυμένων ἐπιμελέστερον, καὶ διορι-  
 σμὸν εὐρεῖν, πότε δυνατόν ἐστι τὸ ζητούμενον πρό-  
 βλημα καὶ πότε ἀδύνατον. Εὐδόξος δὲ ὁ Κνίδιος 9  
 Λέοντος μὲν ὀλίγω νεώτερος, ἑταῖρος δὲ τῶν περὶ Πλά-  
 τωνα \*) γενόμενος, πρῶτος τῶν καθόλου θεωρημάτων  
 τὸ πλήθος ηὔξησε καὶ ταῖς τρισὶν ἀναλογίαις ἄλλας  
 τρεῖς προσέθηκε καὶ τὰ περὶ τὴν τομὴν, ἀρχὴν λα-  
 βόντα παρὰ Πλάτωνος, εἰς πλήθος προήγαγεν καὶ  
 ταῖς ἀναλύσεσιν ἐπ' αὐτῶν χρησάμενος. Ἀμύκλας 10  
 δὲ ὁ Ἡρακλεώτης εἰς τῶν Πλάτωνος ἑταίρων καὶ  
 Μέναιχμος ἀκροατὴς ὧν Εὐδόξου καὶ Πλάτωνι  
 δὲ συγγεγονῶς καὶ ὁ ἀδελφὸς αὐτοῦ Δεινόστρατος \*)  
 ἔτι τελεώτεραν ἐποίησαν τὴν ὅλην γεωμετρίαν. Θεύ- 11  
 διος δὲ ὁ Μάγνης ἔν τε τοῖς μαθήμασιν ἔδοξεν εἶναι  
 διαφέρων καὶ κατὰ τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν· καὶ γὰρ  
 τὰ στοιχεῖα καλῶς συνέταξε καὶ πολλὰ τῶν ὀρικῶν  
 καθολικώτερα ἐποίησεν. Καὶ μέντοι καὶ ὁ Κυζι- 12  
 κῖνος Ἀθηναῖος κατὰ τοὺς αὐτοὺς γεγονῶς χρόνους

καὶ ἐν τοῖς ἄλλοις μὲν μαθήμασι, μάλιστα δὲ κατὰ  
γεωμετρίαν καταφανῆς ἐγένετο. Διηγὸν οὖν οὗτοι  
μετ' ἀλλήλων ἐν ἀκαδημαίᾳ κοινὰς ποιούμενοι τὰς  
ζητήσεις. Ἑρμότιμος δὲ ὁ Κολοφώνιος τὰ ὑπ' Εὐ- 13  
δόξου προηυπορημένα καὶ Θεαιτήτου προήγαγεν ἐπὶ  
πλέον καὶ τῶν στοιχείων πολλὰ ἀνεῦρε καὶ τῶν τό-  
πων τινὰ συνέγραψεν. Φίλιππος δὲ ὁ Μεταῖος 14  
(Μεδμαῖος) Πλάτωνος ὢν μαθητὴς καὶ ὑπ' ἐκείνου  
προτραπείς εἰς τὰ μαθήματα καὶ τὰς ζητήσεις ἐποιεῖτο  
κατὰ τὰς Πλάτωνος ὑφηγήσεις καὶ ταῦτα προὔβαλλεν  
ἑαυτῷ ὅσα ᾔετο τῇ Πλάτωνος φιλοσοφίᾳ συντελεῖν.  
Οἱ μὲν οὖν τὰς ἱστορίας ἀναγράψαντες (inter quos est  
Εὐδημος ὁ Περίπατητικος) μέχρι τούτου προάγουσι  
τὴν τῆς ἐπιστήμης ταύτης τελείωσιν· οὐ πολὺ δὲ τού- 15  
των νεώτερός ἐστιν Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συνα-  
γαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας πολλὰ  
δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλα-  
κώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους  
ἀποδείξεις ἀναγαγὼν. Γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ  
τοῦ πρώτου Πτολεμαίου· καὶ γὰρ ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ἐν  
τῷ πρώτῳ μνημονεύει Εὐκλείδους. Καὶ μέντοι καί  
φασιν ὅτι Πτολεμαῖος ἤρετό ποτε αὐτόν· Εἰ τίς  
ἐστι περὶ γεωμετρίαν (προχειρότερα θεωρία, αὐτὸς δὲ  
ἀπεκρίνατο· μὴ εἶναι βασιλικὴν ἄτραπον πρὸς γεω-  
μετρίαν). Νεώτερος μὲν οὖν ἐστι τῶν περὶ Πλάτωνα, 16  
πρεσβύτερος δὲ Ἑρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους· οὗτοι  
γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις, ὥσπερ καὶ φησιν Ἑρατοσθέ-  
νης· καὶ τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικός ἐστι καὶ τῇ  
φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος· ὅθεν δὴ καὶ τῆς συμπάσης  
στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο τὴν τῶν καλουμένων  
Πλατωνικῶν σχημάτων σύστασιν. Πολλὰ μὲν οὖν καὶ 17  
ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα  
θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας μέστα  
τοιαῦτα γὰρ καὶ τὰ ὀπτικὰ καὶ τὰ κατοπτρικὰ,

τοιαῦται δὴ καὶ αἱ κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις ἐτι  
 δὲ τὸ περὶ διαιρέσεων βιβλίον. Διαφερόντως δ' ἄν  
 τις αὐτὸν ἀγαθὴν κατὰ τὴν γεωμετρικὴν στοιχεί-  
 ωσιν τῆς τάξεως ἔνεκα καὶ τῆς ἐκλογῆς τῶν πρὸς τὰ  
 στοιχεῖα πεποιημένων θεωρημάτων τε καὶ προβλημά-  
 των· καὶ γὰρ οὐχ ὅσα ἐνεχώρει λέγειν, ἀλλ' ὅσα στοι-  
 χεῖον ἡδύνατο παρτίληφεν... Μεθόδους παραδέ- 18  
 δωκε καὶ τῆς διορατικῆς φρονήσεως, ἃς ἔχοντες γυμ-  
 νάζειν δυνήσόμεθα τοὺς ἀρχομένους τῆς θεωρίας ταύ-  
 της πρὸς τὴν εὕρεσιν τῶν παραλογισμῶν, ἀνεξαπάτητοι  
 δὲ διαμένειν, καὶ τοῦτο δὴ τὸ σύγγραμμα, δι' οὗ τὴν  
 παρασκευὴν ἡμῖν ταυτὴν ἐντίθησι, *Ψευδαρίων* 8)  
 ἐπέγραψε, τρόπους τε αὐτῶν ποικίλους ἐν τάξει δια-  
 ριθμησάμενος καὶ καθ' ἕκαστον γυμνάσας ἡμῶν τὴν  
 διάνοιαν παντοίοις θεωρήμασι· τῷ δὲ ψεύδει τὸ  
 ἀληθὲς παραθεῖς καὶ τῇ πείρᾳ τὸν ἔλεγχον τῆς ἀπά-  
 της συναρμόσας (συναρμόσαντες)· (pag. 80.) καὶ . .  
 πορίσματα *Εὐκλείδης* γέγραφε, βιβλία προβλημά-  
 των συντάξας.

1) Cf. Herodot. II, 109. qui etiam addit, polum et diei partes duodecim a Babylonis ad Graecos pervenisse. Platonis Phaedrus. Servius ad Virgil. eclog. III. Aristot. metaphys. I.

2) Hic locus in ed. Bas. corruptissimus est. conf. Mem. d. l'Acad. d. Berl. II. a. 1746. IV. a. 1748.

3) cf. Arist. de Soph. II. ubi Bryson tanquam ψευδόγραφος idem fere tentasse videtur. (Loquitur Aristot. de circuli quadratura per meniscos.)

4) Magister Platonis, cf. Laert. in Platone. *Εἰς Μέγαρον πρὸς Εὐκλείδην σὺν ἄλλοις τισὶ Σωκρατικοῖς ὑπεχώρησεν· ἔπειτα εἰς Κυρῆνην ἀπῆλθε πρὸς Θεόδωρον τὸν μαθηματικὸν καὶ κεῖθεν εἰς Ἰταλίαν πρὸς τοὺς Πυθαγορικοὺς Φιλόλαον καὶ Εὐρυτον.*

5) cf. Diog. Laert. VIII. Archytas.

6) cf. Diog. Laert. in Eud. καὶ Πλάτωνα αὐτὸν ἀκοῦσαι. Suidas Πλάτωνος ἡλικιώτης. Cicero Platonis auditor.

7) Dinostratus, inventor quadratricis (τῆς τετραγωνιζούσης) cf. Papp. IV. 25. — Klügel. Lex. math. Tom. IV. pag. 49.

8) in quo libro τῶν ψευδογράφων (quos perstringit Aristot. de Soph. II.) libros refellisse videtur.

## Appendix III.

### De vita et scriptis Euclidis Geometrae.



De vita clarissimi hujus Graecorum mathematici, cujus subtilitatem in elementis geometricis illustrandis nemo non admiratur, parum nobis constare dolemus.

Graecum eum fuisse, nomen ipsius (*Εὐκλείδης*, Euclides, et apud Arabes Uklid's) operisque venustas ostendit, multorumque scriptorum testimonia probant, inter quos Proclus (Constantinopolitanus ann. 412 — 485 post Ch. n.) et Pappus (Alexandrinus 370 post Ch.) primum locum obtinent, quibus nimirum omnis fere nostra, quae minima est, vitae morumque celeberrimi Geometrae debetur uolitia.

De parentibus ejus nihil accepimus, nihil de urbe, qua natus sit; nisi Arabum (Nasir-Eddini aliorumque) fabulosis credendum esse putas narrationibus, qui Naucratis filium, Zenarchi nepotem eum fuisse contenderunt, genere quidem graecum, domicilio autem Damascenum, ortu Tyrium. <sup>1)</sup>

Quo floruerit tempore ex Procli commentario de primo Elementorum libro conscripto abunde patet, in quo legimus, recentiorem fuisse Euclidem Platonis discipulis, Eratosthene vero et Archimede <sup>2)</sup> (aequalibus circ. ann. 240. ant. Ch. n.) antiquiorem, vixisse enim temporibus Ptolomaei I (Lagi). Verisimile est Euclidem Alexandriae celebrem illam scholam mathematicam aut instituisse, <sup>3)</sup> aut certe ab aliis institutae inter primos operam et studium navasse. Ptolemaeus enim ex eo quaesisse dicitur, an faciliorem sibi tradere posset mathematicarum rerum discendarum methodum, responsumque retulisse: Nulla exstat regia ad mathematicam via. Haec a Proclo tradita nugis

quibusdam Arabici interpretis (Naszir-Eddini) ansam praebuisse videntur. Iste enim in operis praefatione: Regem quendam Graecorum, narrat, litterarum mathematicarum curiosum, Euclidis Thusini (Thus erat Eddini patria) fama audita, arcessisse virum et ab eo petiisse, ut Elementorum libros, qui jam exstarent, sed regi displicerent, in ordinem certum redigeret illustraretque. Illum igitur regi obsequentem, a numero quindecim illorum veterum librorum duobus resectis, reliquos suo nomine promulgasse.

Moribus Euclides usus est temperatis suavissimisque, si Pappo <sup>4)</sup> fides habenda est, qui modestia ejus probata hoc maxime ei laudi tribuit, quod iis, qui studiis mathematicis ingenium accommodarent, amicissimum se praebuerit, nec de laudibus aliorum per nova inventa paratis detrahere studuerit. Tali enim invidia Apollonium Pergeum, quem magnum geometram vocabant, liberum non fuisse, idem Pappus memoriae tradidit.

Omnium, quae hucusque disputata sunt, ratione habita; quam falsa sit eorum opinio, qui Euclidem Megareum, celebrem illum Socratis discipulum, centum fere annos ante Ptolemaeum Athenis florentem, elementorum fuisse auctorem contenderunt, facile apparet. Quem in errorem cum multos alios tum Sebastianum Mattei apud Vitalem Giordanum, <sup>5)</sup> Italicum Euclidis interpretem, incidisse videmus; cujus imbecilla argumentatio jam eo refelli potest, quod, quamquam permulti Graecorum Romanorumque scriptorum de illo disserunt Megaricae scholae auctore, viro vehemente et litigioso, ut perhibet Laertius; <sup>6)</sup> mathematicas disciplinas ab eo egregie auctas vel provectas esse, ex tanto numero nemo commemorat; nisi Valerium Maximum tale quid sensisse putas, qui cum



Platonem ad Euclidem Geometram conductores quosdam misisse narret, aut tempora aut nomina confudisse aut ficta narasse videtur. <sup>7)</sup>

At Euclidem geometram Platonis doctrina imbutum fuisse a Proclo <sup>8)</sup> docemur, qui summum Elementorum finem in constructione quinque figurarum mundanarum, quas etiam Platonicas appellant, positum esse existimat; quem ad finem monente Keplero <sup>9)</sup> omnes omnino referri possunt propositiones omnium librorum, exceptis iis, quae ad numerum perfectum inveniendum excogitata sunt. Sed utut est; nemo infitias ibit, omnia Euclidis opera ita instituta esse, ut singularis philosophi schola nulla repariatur, quae sua haec omnia propria vindicare possit; adeo ille simplicissimis notionibus, quae omnibus hominibus nedum philosophis communia sunt, praemissis, nunquam aut ornandi causa aut ut placita quaedam philosophorum confirmaret, a proposito deflectit. Quod si philosophorum morem imitari voluisset, multis locis occasionem ei oblatam fuisse, quis non videt. Legas ad primum Elementorum librum Procli locupletissimi scriptoris commentarium, ut intelligas, quae de punctis, lineis, de unitate multisque aliis, quae ad mathematicen pertinent, inepta et a mathematica ratione prorsus aliena celeberrimi philosophi disputaverint, somniaverint. <sup>10)</sup> Admirandum igitur est Geometrae illustris ingenium, qui ex minimis et per se notis ad rerum abditissimarum cognitionem perveniendi certam aperuit viam, quam ingressi omnes, qui post eum per bis mille annos exstiterunt clarissimi mathematici, scientiam suam ad eam perfectionem perduxere, a qua ceteras disciplinas longe abesse confitendum est.

Jam superest, ut Euclidis opera ipsa breviter enume-

remus, quae, quantopere ad omnes Mathematicas disciplinas, tum temporis hominibus cognitae, toto animo et studio incubuerit vir egregius, certissima sunt documenta. Pythagorei in quatuor partes universam, mathematicam dividere solebant, quae sunt Arithmetica, Musica, Geometria, Sphaerica, cuius divisionis rationem Proclus exposuit,

Arithmeticam et Geometriam Euclides egregie illustravit 1) praeclarissimo Elementorum opere, (*Στοιχεῖα*) quod ita, ut ab ipso scriptore confectum est, si pauca excipias, quae addita aut immutata esse videntur, ad nostra tempora integrum permansit. 2) Datis (*Δεδομένα*), quorum Proclus quidem mentionem non fecit <sup>11</sup>) sed quae testibus Pappo et Marino huic geometrae tribuenda sunt. Haec quoque nobis integra sunt relictas. <sup>12</sup>) 3) Libro de divisionibus (*Περὶ διαιρέσεων*), qui a Proclo laudatus ad nostra tempora non pervenit; ille enim ejusdem argumenti tractatus latino sermone conscriptus, cuius auctorem Gregorius nominat Mahomedum Bagdedirum, num ex graeco Euclidis libro translatus sit, nec ne, viri docti dubitant. 4) Tribus libris Porismatum (*Πορίσματα*), quorum nomen Proclus, exempla aliquot Pappus memoriae tradiderunt. 5) libro Fallaciarum (*Ψευδάρια*), quem nomine tantum ex Proclo novimus. 6) tribus libris Conicorum, quorum Pappus mentionem facit. 7) libro, qui Loci in plano. (*τοποὶ πρὸς ἐπιφάνειαν*) incipitur, a Pappo laudato.

Musices elementa docuit Euclides duobus libris, quorum alter 8) Introductio Harmonica (*Εἰσγωγή ἁρμονικὴ*), alter 9) Sectio canonis (*Κατατομὴ κανόνο*) inscriptus, uterque nobis relictus est.

Sphaericam uno quidem tantum libro 10) Phaenomenon (*Φαινόμενα*) illustravit, cui tamen duo adjungenda sunt 11) Optica (*Ὀπτικά*) et 12) Catoptrica

(*Κατροπρικὰ*) quorum mentionem Proclus fecit. Relicti sunt nobis tres libri hujus argumenti graece conscripti; sed vera eorum origo ambigitur.

1) Conf. Gartz de Interpretibus Euclidis Arab. pag. 3.

2) Archimedes in Aegypto edoctum esse scribit Diodor. Sicul. V p. 217. Conf. Procli locum supra exhibitum. 15. Ad ea, quae sequuntur, notandum est, Senecam Ep. 91. similia de Alexandro magno narrare. „Alexander Macedonum rex discere Geometriam infelix coeperat ... Erant illa, quae tradebantur subtilia et diligentī intentione „discenda: non quae percipere posset vesanus homo et trans Oceanum „cogitationes suas mittens: „Facilia” inquit: „me doce!” Cui praeceptor „Ista” inquit, „omnibus eadem sunt aequae difficulta.”

3) Apollonium Pergeum, qui teste Heraclide (apud Eutocium in vita Archimedis) sub Ptolemaeo Euergete (247 — 221 a. Ch.) vixit, Euclidis discipulis longo tempore operam Alexandriae dedisse scribit Pappus. Coll. Math. VII.

4) Pappus Collect. math. VII. *Εὐκλείδης ἀποδεχόμενος τὸν Ἀριστέα ἄξιον ὄντα ἐφ' οἷς ἤδη παρεδιδώκει κωνικοῖς καὶ μὴ φθάσας ἢ μὴ θελήσας ἐπικαταβάλλεσθαι τούτων τὴν αὐτὴν πραγματείαν, ἐπεικέστατος ὢν, καὶ πρὸς ἅπαντας εὐμενὴς τοὺς καὶ κατὰ πόσον συναύξειν δυναμένους τὰ μαθήματα, ὥς δεῖ, καὶ μηδαμῶς προσκρουστικὸς ὑπάρχων καὶ ἀκριβὴς μὲν οὐκ ἀλαζονικὸς δὲ καθάπερ οὗτος.* (Apollonius Pergeus qui paulo infra σχολάσας dicitur fuisse τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου μαθηταῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ πλεῖστον χρόνον.) ex Cod. Vindeb. Pappi.

5) Di questo Autore dubitano, ed anco ne fanno lunghe discussioni i Commentatori, se fu il Principe della Setta Megarense o altro Geometra celebre negli anni seguenti, perche del Megarense si sà, che nell' infantia d'Alessandro occupò la cattedra ad Aristotele quando passava legato degli Ateniesi in Persia, e del Matematico si legge, che fù familiare a Tolomeo primo Rè d'Egitto, ma in venticinque o trenta anni soli di differenza non sò per qual ragione non possa essere il medesimo giovane nel tempo d'Alessandro, ed antiano in quel di Tolomeo. Euclide restituito pagina 9. (ab initio).

6) Diog. Laert. (Euclid.) Timonis versum exhibet de Euclide. *Εὐκλείδου, Μεγαρεῦσιν ὃς ἔμβαλε λύσσαν ἔρισμοῦ.*

7) „Plato conductores sacrae arcis (arae Cod.) de modo et forma „ejus secum sermonem conferre conatos, Euclidem Geometram adire „jussit scientiae ejus cedens, immo professioni.” Val. Max. Lib. VIII. cap. 12. Qui locus nisi corruptus est scribarum inscitia, verba Eud. Cnid. (Eudoxum Cnidium, quem primum Aegyptorum de motibus stellarum cognitionem in Graeciam transtulisse Seneca affirmat Nat. quaest. VII, 2. quique, ut Cicero ait, (De divinat. II, 42) in astrologia, judicio doctissimorum hominum facile princeps erat.)

in Euclidem mutantium, errorem Valerii ostendit credentis Euclidem geometram Platonis temporibus vixisse. Philosophum ab eo Megareum pro Geometra habitum esse, vix crediderim. Verbum enim Geometram discernendi causa nomini additum esse videtur, eaque, quae sequuntur „Platonem professioni cessisse” haud perplexe indicant, Euclidem illum, de quo agitur, mathematicis studiis maiorem quam ceteris operam dedisse; quod de Megareo dici non potest, quem ipse Plato mathematico acumine facile superasset; Hunc enim (ὡς γεωμετρικόν) Delii adiisse dicuntur, aram cubicam duplicare ab Apolline iussi. Exstant enim similes de Platone narrationes, quarum eam, quae ad Delium notissimum problema attinet, ex Plutarchi libro de Genio Socratis VII. in medium proferre liceat. Ἦν χρησμός, Δήλοις καὶ τοῖς ἄλλοις Ἕλλησι παῦλαν τῶν παρόντων κακῶν ἔσεσθαι διπλασιάσαι τὸν ἐν Δήλῳ βωμόν οὔτε δὲ τὴν διάνοιαν ἐκείνοι συμβάλλειν δυνάμενοι, καὶ περὶ τὴν τοῦ βωμοῦ κατασκευὴν γελοῖα πάσχοντες, (ἐκάστης γὰρ τῶν τεσσάρων πλευρῶν διπλασιαζομένης ἔλαθον τῇ αὐξήσει τόπον στερεὸν ὀκταπλάσιον ἀπεργασάμενοι δι’ ἀπειρίαν ἀναλογίας, ἥ τῷ μήκει διπλάσιον παρεχέται) Πλάτωνα τῆς ἀπορίας ἐπεκαλοῦντο βοηθόν· ὃ δὲ τοῦ Αἰγυπτίου (Chonuphis scil.) μνησθεὶς προσπαλεῖν ἔφη τὸν θεόν Ἕλλησιν ὀλιγοροῦσαι παιδείας οἷον ἐφυβρίζοντα τὴν ἀμαθίαν ἡμῶν καὶ κελεύοντα γεωμετρίας ἀπτεσθαι μὴ παρέργως· οὐ γὰρ τοι φαῦλον οὐδ’ ἀμβλὺ διανοίας ὀρώσης, ἀκρως δὲ τὰς γραμμὰς ἡσκημένης ἔργον εἶναι, καὶ δυοῖν μέσων ἀνάλογον λῆψιν· ἥ μόνῃ διπλασιάζεται σχῆμα κυβικοῦ σώματος ἐν πάσης ὁμοίως αὐξόμενον διαστάσεως· τοῦτο μὲν οὖν Εὐδόξον αὐτοῖς τὸν Κνίδιον, ἢ τὸν Κυζικηνὸν Ἑλικῶνα συντελέσειν.

Non multum ab his abhorrent, quae Joh. Philoponus (640) in Annal. Poster I, 7 his verbis narrat. Δήλοις λοιμώξασιν ἔχρησεν ὁ Ἀπόλλων ἀπαλλαγῆσθαι τοῦ λοιμοῦ, εἰ τὸν βωμόν διπλασιάσουσιν, κυβικὸν ἔχοντα σχῆμα· οἱ δὲ ἐπωκοδόμησαν προσθέντες τῷ προτέρῳ βωμῷ ἕτερον κύβον ἴσον· ἀλλ’ ἡ τῶν δύο κύβων συνθήκη τὸ τοῦ κύβου σχῆμα ἡλλοίωσε· γέγονε γὰρ ἀντὶ κύβου δοκίς· τοῦ λοιμοῦ δὲ μὴ παυσάμενον, ἔχρησεν ὁ θεός, μὴ πεποιηκέναι αὐτοὺς τὸ προσταχθέν· ὃ μὲν γὰρ προσέταξε διπλασιάσαι τὸν κύβον τουτέστι βωμόν κατασκευάσαι κυβικὸν τοῦ προτέρου διπλάσιον· οἱ δὲ κύβον ἐπὶ κύβῳ ἐπέθηκαν. Ἦλθον οὖν πρὸς Πλάτωνα, ζητοῦντες μέθοδον, πῶς ἂν τὸν κύβον διπλασιάσαιεν· ὃ δὲ πρὸς αὐτοὺς φήσιν· Ἔοικεν ὑμῖν ὀνειδίζειν ὁ θεὸς ὡς ἀμελοῦσι γεωμετρίας· ὃ δὲ τοῦ κύβου διπλασιασμός εὐρεθήσεται, φησιν, εἰ δύο εὐθειῶν δύο μέσαι ἀνάλογον εὐρεθῆεν. καὶ τοῦτο τὸ πρόβλημα τοῖς μαθηταῖς (inter quos fuit Eudoxus Cnidius) προεβάλλετο, οὔτινες καὶ περὶ τούτου γεγράφασιν, ὡς δεδύνηται ἕκαστος, ὧν οὐδέν τι περισώζεται μεχρὶ τοῦ νῦν, ἀλλ’ οὐδ’ ὁ Ἰωμέτης (Euclidem nostrum intellige, quem, ut videt, Philoponus a Platonis discipulis sejungit.) περὶ τοῦτο ἐπεσημίνατο. Ce-

terum cubi duplicatio ab Archyta inventa esse traditur. conf. Diog. Laert. Lib. VIII. in Archyta, De re ipsa vide Klügel Lex Math. I. p. 721.

8) cf. Procli locum supra exhibitum. 16.

9) οἱ Πυθαγόρειοι τὸ σημεῖον ἀφορίζονται μονάδα προσλαβοῦσαν θέσιν. (pag. 6. lin. 7. a fine.) . . . Τὴν τοῦ δωδεκαγώνου γωνίαν Διὸς εἶναι φησιν ὁ Φιλόλαος ὥς κατὰ μίαν ἔνωσιν τοῦ Διὸς ὅλον συνέχοντος τὸν τῆς δωδεκάδος ἀριθμὸν· ἡγεῖται γὰρ καὶ παρὰ τῷ Πλάτῳι δωδεκάδος ὁ Ζεὺς καὶ ἀπολύτως ἐπιστροπεύει τὸ πᾶν (pag. 48. lin. 15. ab ultima) . . . Εἰ δὲ εἰς σῶμα καὶ ψυχὴν θέλεις διαιρεῖν, πᾶν μὲν τὸ σωματικὸν τῆς τοῦ εὐθέως μερίδος θήσεις, πᾶν δὲ τὸ ψυχικὸν τῆς τοῦ κύκλου ταυτότητος καὶ ὁμοιότητος μετέχειν. (pag. 41. lin. 19.)

Conf. Ciceronem. Si vero aut numerus quidam sit animus, quod subtiliter magis quam dilucide dicitur, etc.

11) Datorum mentionem Proclus non fecit. Erravit igitur indicis ad Proclum apud Fabricium (Bibl. Graec. ed. Harl. IV. pag. 83.) confector, qui nomini Euclidis librorum nomina addit locosque indicat, ubi Proclus de iis disserit. Quem autem ad δεδομένα attrahit locum, negligentissime inspexisse videtur, cum ibi non de singulari quodam Euclidis libro agatur, sed de iis, quae ad tertium theorema libri I. Elementorum data sunt. Scripsit enim Proclus: Ἐπειδὴ δὲ δυνατόν ἦν, τὰς μὲν δύο πλευρὰς ἴσας ἔχειν ταῖς δύο πλευραῖς, οὐ μόντοι τὸ θεώρημα ἀληθεύειν, τῷ μὴ εἶναι ἑκατέραν ἑκατέρα ἴσην, ἀλλ' ἅμα ἀμφοτέρας, διὰ τοῦτο προσέθηκεν ἐν τοῖς δεδομένοις ἴσας εἶναι τὰς πλευρὰς οὐχ ἀπλῶς ἀλλ' ἑκατέραν ἑκατέρα.

12) Marinus Pappo recentior, praefationem scripsit ad librum datorum, quae huic praefixa est in graecis textus editionibus sub titulo Μαρίνου τοῦ φιλοσόφου ἡ εἰς τὰ δεδομένα Εὐκλείδου προθεωρία. In hoc tractatu legitur (Ed. Oxon. pag. 458.) Τὸ τῶν δεδομένων βιβλίον ὁ Εὐκλείδης ἐξεπόντησεν, ὃν καὶ στοιχειωτὴν κύριον ἐπονώμασαν· πάσης γὰρ σχεδὸν μαθηματικῆς ἐπιστήμης στοιχεῖα καὶ οἷον εἰςαγωγὰς προέταξεν, ὥς γεωμετρίας μὲν ὅλης ἐν τοῖς 17 βιβλίοις καὶ τῆς ἀστρονομίας ἐν τοῖς φαινομένοις καὶ μουσικῆς δὲ καὶ ὀπτικῆς ὁμοίως στοιχεῖα παραδέδωκεν καὶ τῆς περὶ δεδομένου ταύτης πραγματείας ἐν τῷ προκειμένῳ βιβλίῳ στοιχεύσιν ἀναλυτικὴν ἐποιήσατο.

Fuere alii decem, quibus nomen Euclidis erat, quos percenset Fabricius III. 19. in adnotat.

## Appendix IV.

### De elementis geometricis.



Elementa sive initia omnium rerum Graeci *στοιχεῖα* nominabant, e quibus omnia nascuntur nascentia et in quod omnia ultimum dissolvuntur. Quamobrem Euclides libros hos, quibus omnia ea, quae ad diversas mathematicarum disciplinarum partes cognoscendas maxime necessaria sunt, certo ordine disposuit, hoc nomine appellavit, illorum imitatus exempla, qui ante ipsum doctrinae initiis in conspectu ponendis operam dederant, Hippocratis, Leontis, Theudii, quos omnes multo se inferiores reliquit acumine, subtilitate, perfectione. <sup>1)</sup>

Proclus, qui, ut supra memoravi, mundanarum figurarum (i. e. quinque corporum regularium) constructionem ultimum Euclidis scopum in conscribendis elementis fuisse contendit, hunc tamen operis unicum finem constitui non posse confitetur; aliud enim propositum cum eo arcte conjunctum esse, scilicet ut tiro-nibus hac illarum figurarum descriptione methodus traderetur, qua in omnibus mathematicis demonstrationibus uti possent, fundamentaque, ut ita dicam, ponerentur, quibus nemo carere posset, qui in tam recondita arte subtilique versari vellet. <sup>2)</sup> Et re vera, si ab his initiis profecti non essent mathematici, dubitandum est, an nullos unquam fructus tulisset Geometriae studium.

Quod autem mundanas illas figuras attinet, ultimum quidem Elementorum librum, decimum tertium dico, in iis versari, nec ultra provectam videmus geometriam elementariam in his libris; sed multa theoremata offendimus, quarum demonstratione supersedere potuisset Euclides, si illum tantum scopum intueri cursumque suum

in eum unum dirigere voluisset. At elementa figurarum nec non numerorum traditurus id potissimum egit, ut nihil omitteret, quod ex aliqua parte ad perfectam figurarum omnium, quibus circuli et lineae rectio notio subest, cognitionem necessarium esset; nihil insereret, quod ex iis, quae jam demonstrata erant, facile probari posset, quin novum aliquid et simplex offerret. Non omnia igitur docuit, sed quae aditum praeberent ad omnia. Recte igitur Proclus ea tantum elementa esse dicit, quibus quasi simplicissimis fundamentis fulta doctrina ad aliorum perceptionem ascendat, quaeque ad mathematicam cognitionem perficiendam ut singulae litterae ad vocem formandam maxime sint necessaria. Exstare enim permulta, quae simplicia quidem sint, sed nihil ad mathematicam doctrinam absolvendam conferant, ut notissimum illud theorema, quo probatur, lineas perpendiculares e trianguli angulis ad latera opposita ductas uno eodemque puncto convenire.<sup>3</sup>) Hujusmodi igitur demonstrationibus, quas Elementis similes Proclus appellat, omissis, earumque, quae ne simplex quidem aliquid exhibent, prorsus nulla habita ratione, ambages reliquit, certissimamque Geometra indagavit viam, quae ad elementariae doctrinae consummatam cognitionem perducere posset. Quod quam feliciter ei contigerit, et opus ipsum et multorum eruditissimorum hominum laudes testantur.

Non omnia, quae in elementis traduntur, ab Euclide ipso inventa esse, sed ex aliorum scriptis collecta, et in hunc ordinem redacta, et per se patet et ex Procli commentario discitur, qui Eudoxi et Theaeteti inchoatis operibus Euclidem fastigium imposuisse demonstrationesque eorum magis perspicuas et ad propositiones probandas aptiores fecisse memoriae tradidit.<sup>4</sup>) Nam si collegisse dicimus Euclidem aliorum inventa,

cave intelligas, eum problemata et theoremata descripsisse, sicut in aliorum scriptis exstarent; ordine enim mutato in mathematicis omnis argumentandi ratio immutetur necesse est. Theoremata igitur cum permulta ut suo loco indicabimus, aliunde ab Euclide in haec elementa translata sint; nulla tamen controversia est, quin eas, quae in elementis reperiuntur, propositionum demonstrationes aut ipse invenerit aut ab aliis inventas ita mutaverit, ut ad propositum sibi finem perveniret.

Quamquam numerus Elementorum Euclidis praeter Marinum qui litterarum signis eum notavit, a scriptorum nemine recensetur; tertium decimum tamen librum ultimum fuisse multis probatur argumentis. Libri enim duo, qui sub titulo quarti decimi et quinti decimi adjuncti sunt, praefationem habent, quam in ceteris desideramus; atque haec ipsa praefatio indicat, post Apollonii (Pergaei sine dubio) tempora eos conscriptos esse. Praeterea ipsa demonstrandi methodus prodit, non esse Euclidis hos duos ultimos libros. Haec enim verba: τοῦτο δὲ γράφεται ὑπὸ μὲν Ἀρισταίου<sup>5</sup>) ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ „πέντε σχημάτων σύγκρισις“ ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐκδόσει τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον . . . . γραπτὸν δὲ καὶ ἡμῖν αὐτοῖς ὅτι . . . . quae habes in altera quarti decimi libri demonstratione, Euclidem certe non sapiunt, qui nullo loco in elementis ad alios libros lectores delegare solet.<sup>6</sup>) Adde, quod elementorum vim non habent ea, quae his libris continentur, secundum illam, quam supra exhibuimus definitionem; continent enim amplificationem aliquam cognitionis sed ad altiora progrediendi viam non aperiunt. Ceterum in codice quodam antiquissimo, Savilio teste, in fine tertii decimi libri Scholiastes adscripserat. Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναθροίσας ἦν ἐπὶ χρόνοις Ἀλεξάνδρου τοῦ



*Μακέδονος. Θεῶν δὲ ὁ συντάξας αὐτὰ ἐπὶ Θεωδω-  
σίου τοῦ βασιλέως. 7)* Talia autem in fine operis ad-  
scribi solent. Praeterea sicuti Marinus tredecim tan-  
tum agnoscit libros elementorum, ita arabica Nasir-  
Eddini versio, multique codices graeci hunc tantum  
numerum continent. 8) Haec omnia satis probare  
videntur, Euclidem hos duos ultimos libros non scrip-  
sisse; qui Hypsichi (Isidori discipulo) 9) Alexandri-  
no 10) tribui solent, quem Theophylactus 11) inter  
praecipuos mathematicos fuisse tradidit, cuique ea  
quae in praefatione illa dicuntur optime conveniunt.

Fuere jam apud antiquos, qui Euclidis elementa  
scriptis illustrarent (quos *ἐξηγήτας* Proclus nominat p.  
53). Aeneas Hieropolites in compendium ea contu-  
lit. 12) Theon Alexandrinus universa recensuisse,  
perpauca, quae sibi displicerent, rejecisse, passim no-  
vas demonstrationes addidisse videtur. Proclus locuple-  
tissimum et copiosissimum ad primum librum Euclidis  
commentarium quatuor libris confecit, cuius in fine  
se reliquos Elementorum libros eodem modo illustra-  
turus esse pollicetur, aliarum rerum cura liberatum.

De compendiaria illa Elementorum editione ab  
Aenea instituta, quae ad nostra tempora non per-  
venit, nihil fere praeter auctoris nomen Proclus  
tradidit libro IV. ad I. 13) Ipse Proclus, inter  
Platonicos philosophos scriptor haud ignobilis,  
Constantinopoli natus, Xantho, urbe Lyciae, eru-  
ditus Alexandriae Olympiodorum audivit, postea  
Athenis Syriani cathedram (450. p. Ch. n.) occupavit  
et usque ad mortem (485. p. Ch.) 14) tenuit. Com-  
mentarius ejus in primum Elementorum librum, opus  
magnae assiduitatis et doctrinae non solum mathema-  
ticis sed philosophis etiam et literarum historiae stu-  
diosius perutilis est. Disputatur enim in primo libro,  
quem

quem locum inter disciplinas mathematica occupet, quasque partes habeat; in secundo de geometria, de claris mathematicis, de methodo mathematico propositionumque divisione, de definitionibus; in tertio de postulatis et axiomatis propositionibusque, quae ad triangula pertinent (1 — 26); in quarto de reliquis primi libri propositionibus. Exhibentur in his libris definitiones, postulata, axiomata, theoremata, problemata eodem ordine et, si pauca excipias, iisdem verbis, ac in vulgatis Elementorum Euclidis editionibus graecis leguntur, quare non est dubitandum, quin hae textum contineant non multum ab eo alienum, quo ipse Proclus usus est. Demonstrationes theorematum et problematum omittuntur quidem in hoc commentario; sed ex iis, quae explicandi et illustrandi causa disputantur, satis apparet, has quoque cum iis, quae ad nostra tempora venerunt, maxime congruentes fuisse. Cujus rei cum in adnotationibus ad singulas propositiones multa exempla exhibiturus sim, hoc loco disjunctionis notissimae problematum et theorematum mentionem fecisse sufficiet, qua in fine demonstrationum utitur Euclides, his quidem verba *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*, illis *ὅπερ ἔδει ποιῆσαι* adjiciens. Hoc in editionibus nostris factum esse videmus, et Proclus Euclidem hoc fecisse affirmat.<sup>15)</sup> Cum praeterea Proclus aliorum mathematicorum demonstrationes saepius addere soleat, nominaque inventorum proferre, in quo cum Diogene Laertio plerumque consentire eum intelleximus; mirum est, inter tot nomina Theonis Alexandrini mentionem nullam factam esse, quem Pappi, a Proclo tribus locis laudati,<sup>16)</sup> aequalem, quinquaginta fere annis ante Proclum vixisse constat. Incredibile est, Proclum,<sup>17)</sup> qui Alexandriae fuerat, Theonis de rebus mathematicis merita ignorasse, aut, si non ignoraret, tacuisse.

Quamobrem, nisi forte iis locis, qui e nostris Procli editionibus temporum injuria exciderunt, illam Theonis Elementorum editionem laudatam fuisse censemus; hoc Procli silentium probare videtur, editionem illam non adeo a ceteris discrepasse, ut ejus jam ab initio rationem habere opportuisset.

At perscrutantibus nobis, quae existant Theonicae editionis certa indicia, ad ipsius Theonis in Almagestum commentarium redeundum est, ubi ipse affirmat, se ad finem sexti libri demonstrasse, sextores circulorum aequalium proportionales esse angulis ad centrum constitutis. Hoc additamentum in omnibus exemplaribus legitur post verba illa ὅπερ ἔδει δείξαι, quae finem imponunt demonstrationi Euclideae. (Conf. pag. 191.) Quare hoc et his similia, quae per se magni momenti non sunt, ut alterae demonstrationes, a Theone editioni suae adjecta esse videntur.<sup>18)</sup> In primo Elementorum libro nullae reperiuntur alterae demonstrationes, nihilque, quod additum esse et superfluum videatur, quare hunc a Theone non mutatum, et Proclo illius laudandi occasionem nullam praebitam esse censemus.

Haec si recte perpendimus, illam nonnullorum codicum inscriptionem: *Εὐκλείδου στοιχείων ἐκ τῶν Θεωνος συνουσιῶν . . . ἐκ τῆς Θεωνος ἐκδόσεως* et similes<sup>19)</sup> non ita interpretabimur, ut textum Euclides a Theone prorsus immutatum et theoremata in alium ordinem redacta putemus,<sup>20)</sup> nec in eorem sententiam abibimus, qui Euclidi quidem theoremata, Theoni demonstrationes tribuerunt,<sup>21)</sup> sed persuasum nobis erit, textum nos habere Euclidis, si quem alius scriptoris graeci, integrum, paucis quidem locis scribarum negligentia corruptum, sed nullo loco ita depravatum,

ut verum aut vero proximum facili negotio reperiri non possit. <sup>22</sup>)

1) Cf. Proclum p. 20. (illum locum quem supra pag. 292. §. 17—18. exscripsimus.) Praeterea, id quod maxime operis praestantiam probat, Archimedes, Apollonius et ceteri Geometrae propositionibus Euclidis tanquam principiis et notissimis elementis utuntur. Καθάπερ δὴ καὶ ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τοῖς περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ οἱ ἄλλοι, πάντες τοῖς ἐν αὐτῇ τῇ πραγματείᾳ δεδειγμένοις ἀρχαῖς ὁμολογουμέναις χρῶμενοι. (Procl. p. 20.)

2) Conf. locum ex Proclo pag. 293. §. 18.

3) Στοιχεῖα μὲν οὖν ἐπονομάζεται, ὣν ἡ θεωρία δι᾿ακνέεται πρὸς τὴν τῶν ἄλλων ἐπιστήμην καὶ ἀφ' ὧν παραγίνεται ἡμῖν τῶν ἐν αὐτοῖς ἀπόρων ἡ διάλυσις· ὥς γὰρ τῆς ἐγγραμμάτου φωνῆς εἰσὶν ἀρχαὶ πρῶται καὶ ἀπλούσταται καὶ ἀδιαίρεται, αἷς τὸ ὄνομα τῶν στοιχείων ἐπισημαζόμεν καὶ πᾶσα λέξις ἐκ τούτων ὑφέστηκεν καὶ πᾶς λόγος, οὕτω δὴ καὶ τῆς ὅλης γεωμετρίας ἐστὶ τινα θεωρήματα προηγούμενα καὶ ἀρχῆς λόγον ἔχοντα πρὸς τὰ ἐφεξῆς διήκοντα διὰ πάντων καὶ περιεχόμενα πολλῶν ἀποδείξεις συμπτωμάτων αἷ δὴ στοιχεῖα προσαγορεύουσι· στοιχειώδη δέστιν ὅσα διατείνει μὲν ἐπὶ πλείω καὶ τὸ ἀπλοῦν ἔχει καὶ τὸ χαρίεν, οὐκέτι μὲν καὶ τῶν στοιχείων, τῷ μὴ πρὸς πᾶσαν αὐτῶν τὴν ἐπιστήμην κοινὴν εἶναι τὴν θεωρίαν, οἷον τοῖς τριγώνοις τὰς ἀπὸ τῶν γωνιῶν καθετόους ἐπὶ τὰς πλαγίας καθ' ἐν σιμείον συμπέπτειν· ὅσα τε μήτε εἰς πλήθος ἔχει διήκουσαν τὴν γνώσιν μήτε αὐτὴν γλαφυρόν τι προφαίνει καὶ χαρίεν, ταῦτα καὶ τῆς τῶν στοιχειωδῶν ἔξω πίπτειν δυνάμεως. (Procl. p. 21.)

4) Conf. locum ex Proclo p. 292. §. 15.

5) Hujus Aristaei quinque alios libros τόπων στερεῶν descripsit Papp. in praef. ad lib. VII,

6) Ne elementorum quidem numerum exhibet Euclides, si ea, quae jam demonstrata sunt, in memoriam revocat, sed verba theorematis ipsa adhibet. In Hypsiclis libris vero elementorum numerus saepius indicatur ut XIV. 1. φανερόν δὴ ἐκ τῶν ἐν τῷ τριςκαιδεκάτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων. XV. 5. in fine ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις συναποδέδεικται τοῦτο· quae verba sola probare possunt, haec theorematata ab Euclide non esse,

7) Conf. Praefat. ad Euclidis editionem Oxoniensem.

8) In codice quodam Mediceo Florentiae, secundum Bandinium titulus libri XIV. est: Τρικλέους τὸ εἰς τὸν Εὐκλείδην ἀναφερόμενον. Similem titulum Codex Monacensis ex saeculo decimo (N. 427 teste Hardtio) habet. Εἰς Εὐκλείδην ἀναφερόμενον id ὑψικλέα. (sine dubio pro Τρικλέους.)

9) Isidori discipulum se ipse indicat XV, 7. Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος μέγας διδάσκαλος. Post Proclum ergo vixit Hypsicles; fuit enim Isidorus, qui Justiniano imperante floruit, et Alexandriam Athenis

se contulit, Marini, Marinus Procli discipulus. (Phot. bibl. Cod. 242, p. 338. ed. Beck.)

10) In bibliotheca Bodleiana exstat Versio arabica tredecim librorum Euclidis per Isaac Ibn Honein; posteriores, qui Hypsichi Ascalonitae tribuuntur arabice vertit Costu Ibn Lucae.

11) Sin teneri (princeps) philosophia videbitur et mathematicis delectari, obsidebunt ostium aulae pleni Platonis homines et ne janitoribus quidem Archimedes, Euclides, Hypsicles ignoqui fuerint. Theoph. instit. reg. 19.

12) Pappum et Heronem commentarios ad elementa conscripsisse, ex Procli commentario conijcere licet pag. 111. ubi haec leguntur ad I. 47. τῆς δὲ τοῦ στοιχειώτου ἀποδείξεως οὐσης φανερᾶς οὐδὲν ἡγοῦμαι δεῖν προσθεῖναι περιττόν, ἀλλὰ ἀρκεῖσθαι τοῖς γεγραμμένοις, ἐπεὶ δὲ ὅσοι προσέθηκάν τι (προσέθεσαντι Bas.) πλέον ὥς περὶ Ἡρώνα καὶ Πάππου, (h. e. Hero et Pappus) ἤναγκάσθησαν προσλαβεῖν τι τῶν ἐν τῷ ἔκτῳ δεδειγμένων.

13) Procl. p. 95. ὁ Ἱεραπολίτης Αἰνείας ὁ τὴν ἐπιτομὴν γράψας τῶν στοιχείων.

14) Aliter apud Hardt. in bibl. Monac. IV. 249 scribat. „Proclus Diad. Philos. A. C. 518 vel 19 plusquam septuagenarius obiit.“

15) Ὅτι δὲ καὶ ἡ Εὐκλείδου στοιχειώσεις ἔχει τὰ μὲν προβλήματα καὶ δὲ θεωρήματα φανερόν ἐστι τοῦτο διὰ τῶν καθ' ἕκαστον, καὶ αὐτοῦ προστεθέντος ἐπὶ τέλει τῶν δεικνυμένων ὅπου μὲν τὸ ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, ὅπου δὲ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16) ad lib. I. axiom. ult. pag. 55. ad I. 5. pag. 67. ad lib. I. 47. pag. 111.

17) Quam multa Proclus perlegerit quamque rationem in opere conficiendo inierit ex ipso discas. Ἀναλαμβάνοντες ἐπιβραχὺ (in locupletissimo copiosissimoque opere!) τὴν (ἐπιβολὴν) τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων λόγων· καὶ περὶ διαφορᾶς αὐτῶν καὶ τῶν ἐκατέρου μερῶν καὶ τῶν ἐν αὐτοῖς διαιρέσεων ἐπὶ τὴν ἐξήγησιν τραπώμεθα τῶν δεικνυμένων ὑπὸ τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὰ μὲν γλαφυρότερα τῶν εἰς ταῦτα γεγραμμένων τοῖς παλαιοῖς ἀναλεγόμενοι καὶ τὴν ἀπεραντον αὐτῶν πολυλογίαν συντέμνοντες, τὰ δὲ τεχνικώτερα καὶ μεθόδων ἐπιστημονικῶν ἐχόμενα παραδίδοντες, τῇ τῶν πραγμάτων ἐπεξεργασίᾳ πλέον ἀπονέμοντες ἢ τῇ ποικιλίᾳ τῶν πτώσεων καὶ λημμάτων, οἷς ὥς τὸ πολὺ, μαροπρεπῶς (fortasse legendum νεαροπρεπεῖς) ἐπιτρεχόντας ὁρῶμεν. Cui haec legenti non Eutocii in mentem venit anxia cura omnes casus enumerantis in commentariis suis.

18) Alexander (Aphrodisiensis) qui aliquot saecula ante Theonem vixit, eam quae quinta est decimi libri citat pro quarta pag. 87. commentariorum in priora Aristotelis, ut necesse sit, aliquam ex praecedentibus, quartam uti reor, qua sine magno incommodo

sane carere potuissemus, suo tempore ab elementorum libro abfuisse vel saltem cum tertia coaluisse. — Sic Savilius in praelect. pag. 7, et seq.

19) Cod. CIII. in bibl. Caesar. Vindeb. habet ἐκ τῶν Θ· ἐκ δόξεως. Cod. Florentini duo ἀπὸ συνουσιῶν τοῦ Θ. Edit. Bas. ἐκ τῶν Θ· συνουσιῶν. cf. etiam quae supra annotavimus.

20) Quod P. Ramus in praefatione Arithmeticae (Paris 1555.) arbitratum esse videmus, qui Euclidis theoremata de numeris a Theone male composita, ut putat, pro arbitrio suo invertens, veram Euclidis dignam numerorum theoriam invenisse sibi videtur.

21) Homines stulti et perridiculi, inquit Savilius, quasi ullus unquam artifex suas edi voluerit conclusiones, nullis adjectis probationibus. Praef. ad ed. Ox.

22) Cave omnia, quae falsa et Euclide minus digna videantur, Theoni adscribas. Recte enim Gregorius in praefatione: „Sunt „vero ex his quaedam, quae Theonem non sapiunt; sed a sciolis quibusdam conscriptae sunt; sunt et lemmata et corollaria quaedam „in Elem. 10. quae ab ageometris subijuncta sunt.“



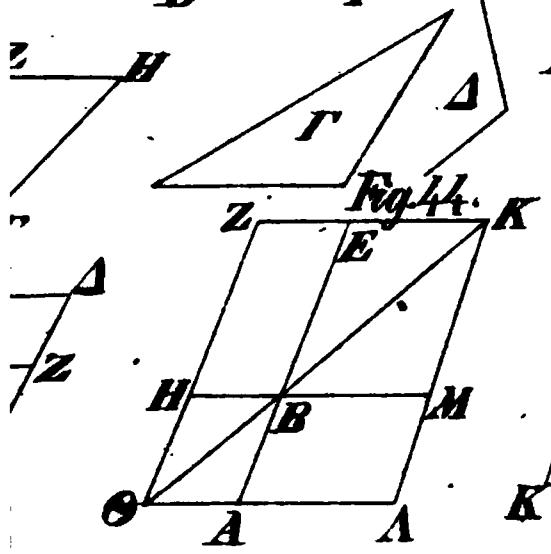
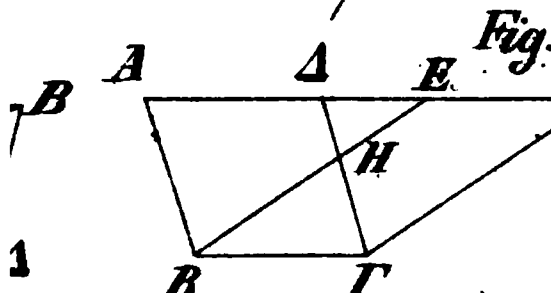
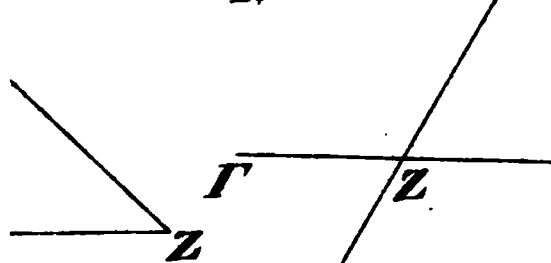
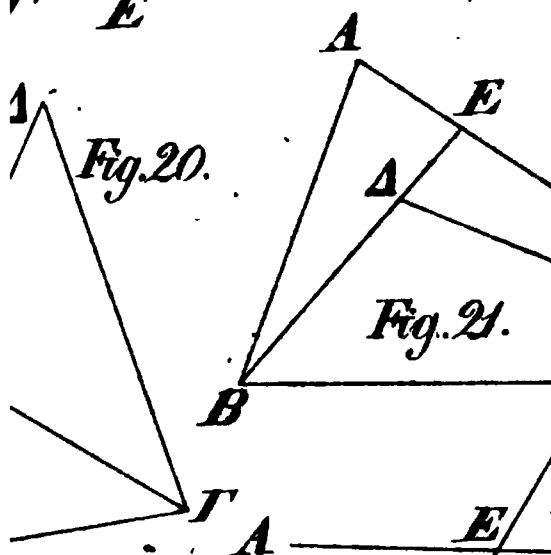
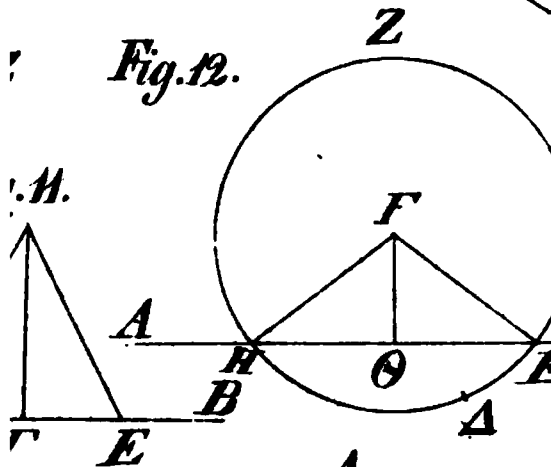
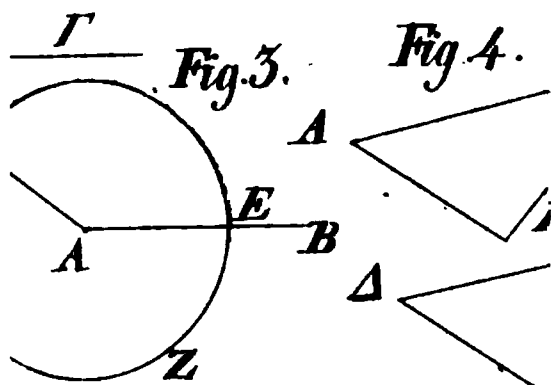
## Loci emendandi.

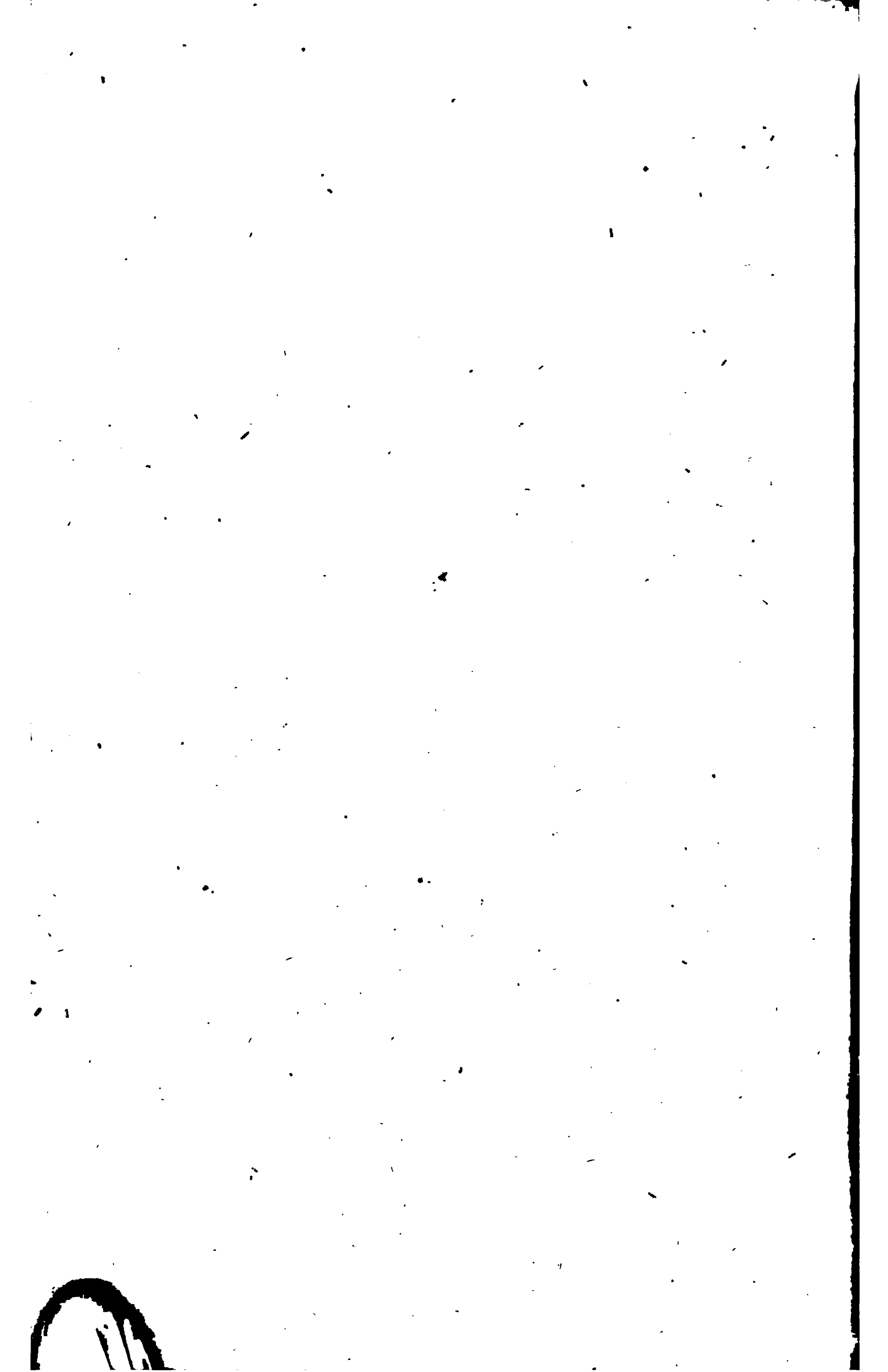
|      |      |      |     |                                |
|------|------|------|-----|--------------------------------|
| Pag. | 3.   | lin. | 13. | Ἡτήσθω                         |
| -    | 5.   | -    | 6.  | εὐθεία                         |
| -    | 22.  | -    | 29. | συνέσταται                     |
| -    | 31.  | -    | 6.  | τοῦ                            |
| -    | 32.  | -    | 20. | desunt verba ὅπερ ἴδει δεῖξαι. |
| -    | 42.  | -    | 23. | ἄρα deest post alterum ZΛ.     |
| -    | 43.  | -    | 23. | τῶν                            |
| -    | 44.  | -    | 9.  | ab initio ΛΛ                   |
| -    | 45.  | -    | 7.  | τρίγωνοις                      |
| -    | 51.  | -    | 6.  | ab initio ΛΓ ΓΒ                |
| -    | 62.  | -    | 22. | ἑξυγωνίοις                     |
| -    | 67.  | -    | 22. | ΔΑΕ                            |
| -    | 77.  | -    | 2.  | ἐφαπτομένη                     |
| -    | 96.  | -    | 32. | γωνία                          |
| -    | 100. | -    | 16  | τοῦ τε                         |
| -    | 104. | -    | 3.  | μή                             |
| -    | 121. | -    | 20. | ς                              |
| -    | 130. | -    | 32. | εἰλήφθω                        |
| -    | 132. | -    | 2.  | Γ ἴσον τῷ ΒΕ                   |
| -    | 155. | -    | 8.  | δίσκου                         |
| -    | 174. | -    | 4.  | ΗΘΛ.                           |
| -    | 177. | -    | 27. | τῇ ΗΘ                          |
| -    | 180. | -    | 11. | ΑΒΓΔ ΕΗ                        |
| -    | 185. | -    | 24. | ab initio ΤΦΧ                  |
| -    | 193. | -    | 22. | ἄρτιον ἀριθμὸν)                |
| -    | 198. | -    | 2.  | τὸν Δ                          |
| -    | 204. | -    | 12. | ὁ ΑΒ                           |
| -    | 206. | -    | 4.  | τούς Β Δ                       |
| -    | 207. | -    | 18. | εἰς τὰς                        |
| -    | 218. | -    | 6.  | Γ Δ καὶ οἱ Ε Ζ                 |
| -    | 296. | -    | 16. | communes                       |
| -    | 300. | -    | 33. | ἐπωνόμασαν                     |
| -    | 302. | -    | 4.  | rectae.                        |

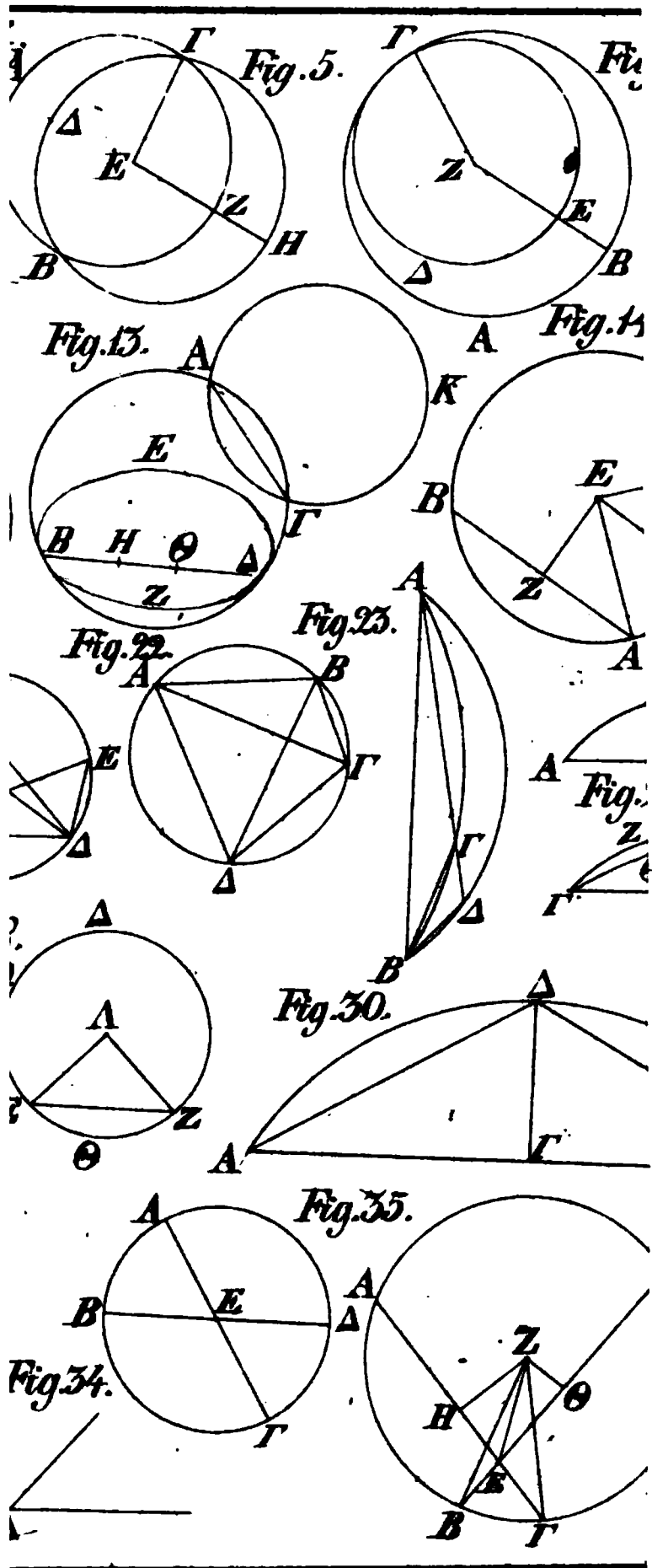
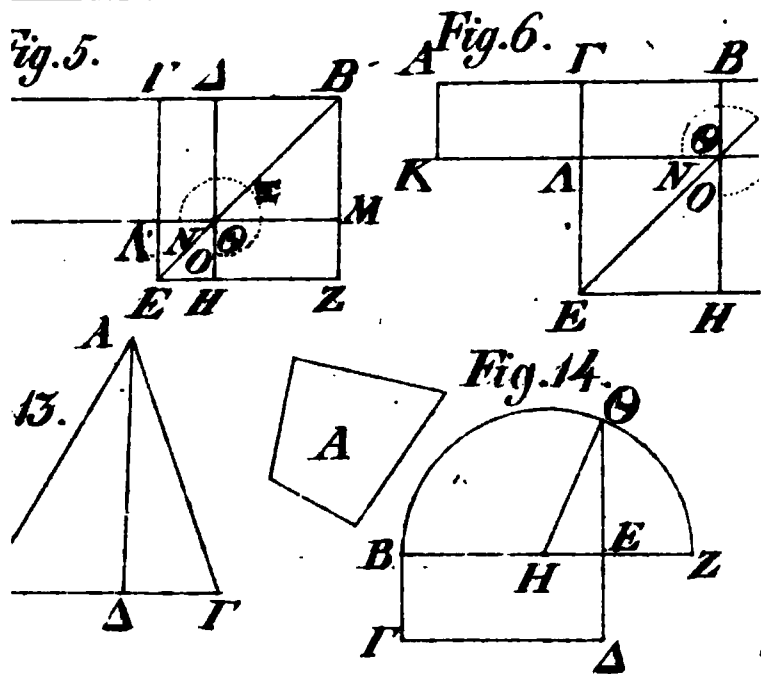
275 heading IX

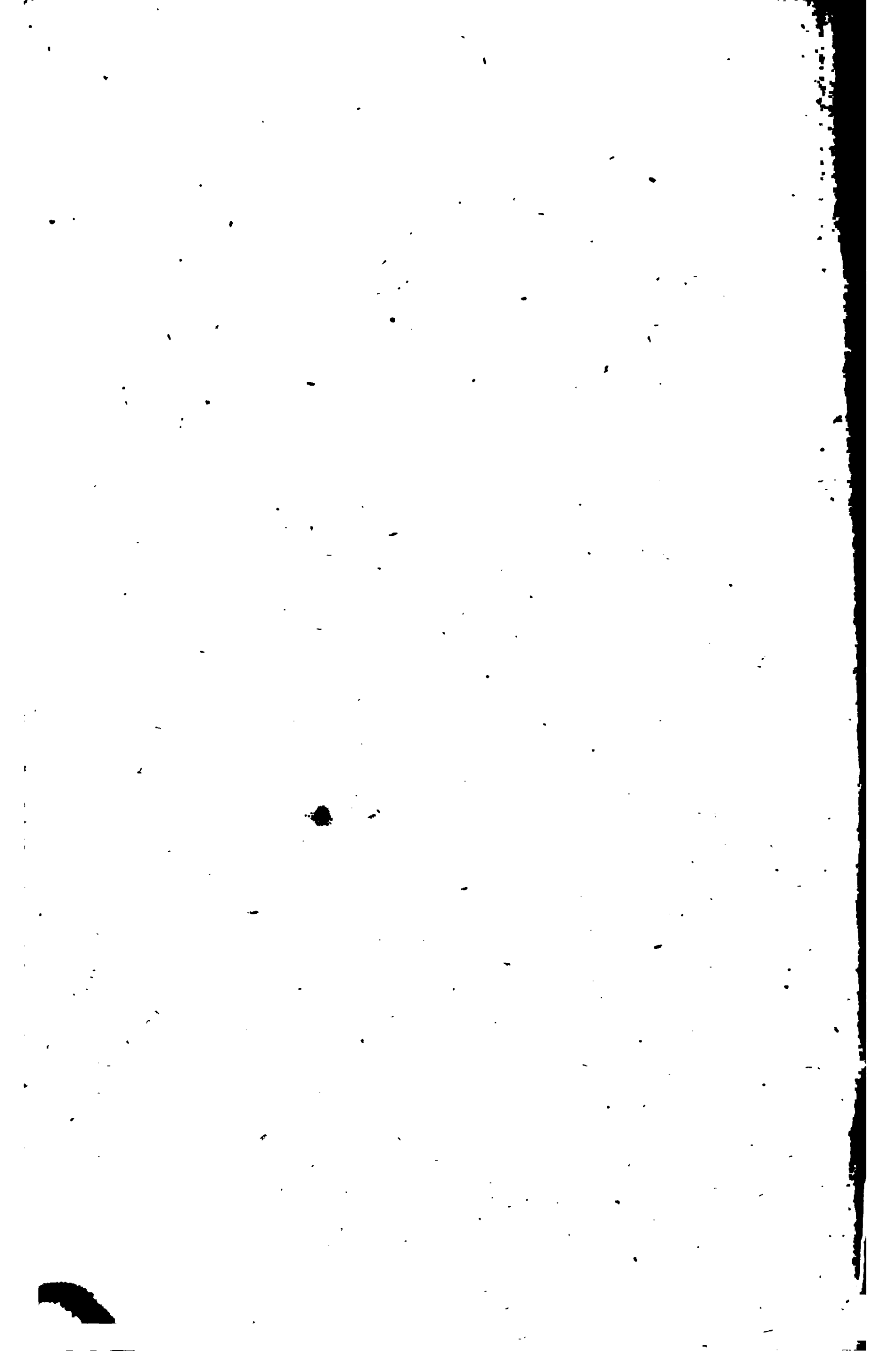






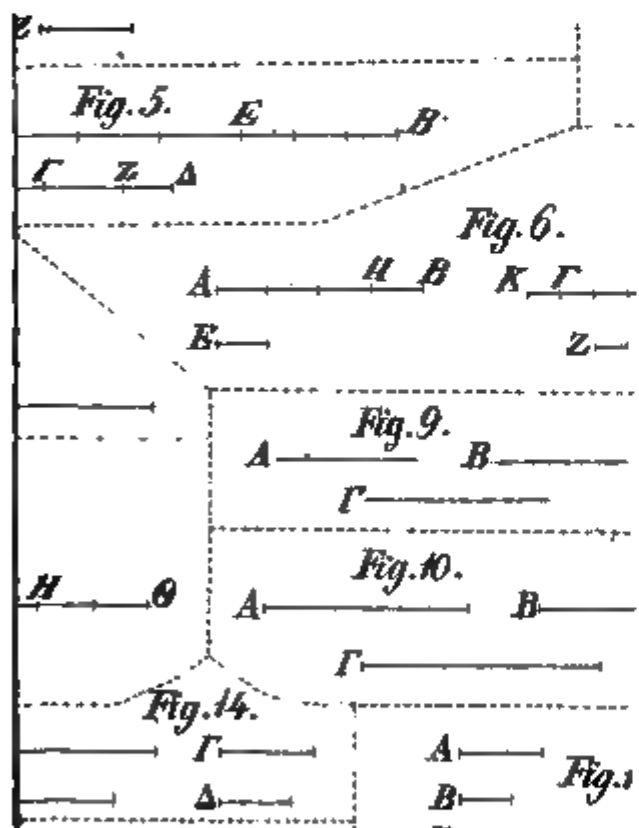
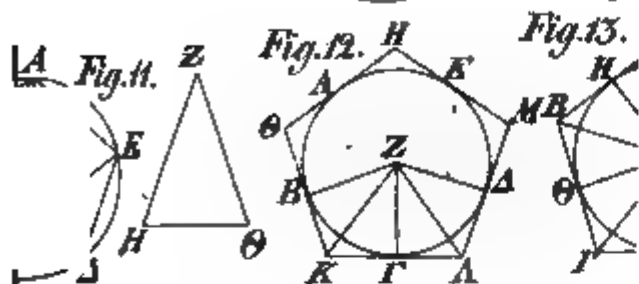
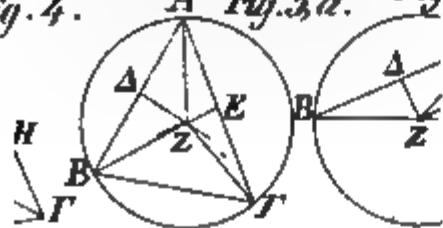


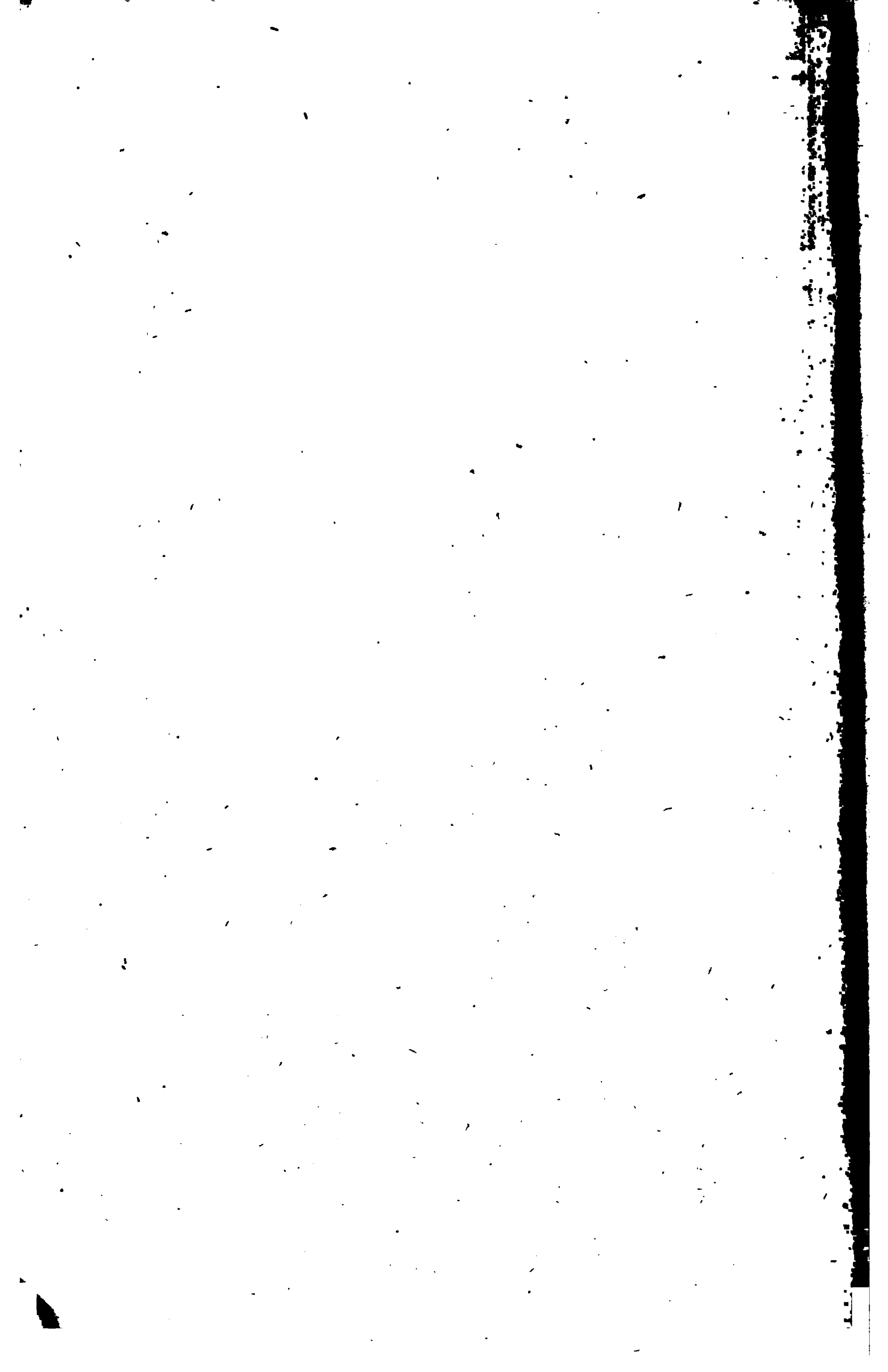


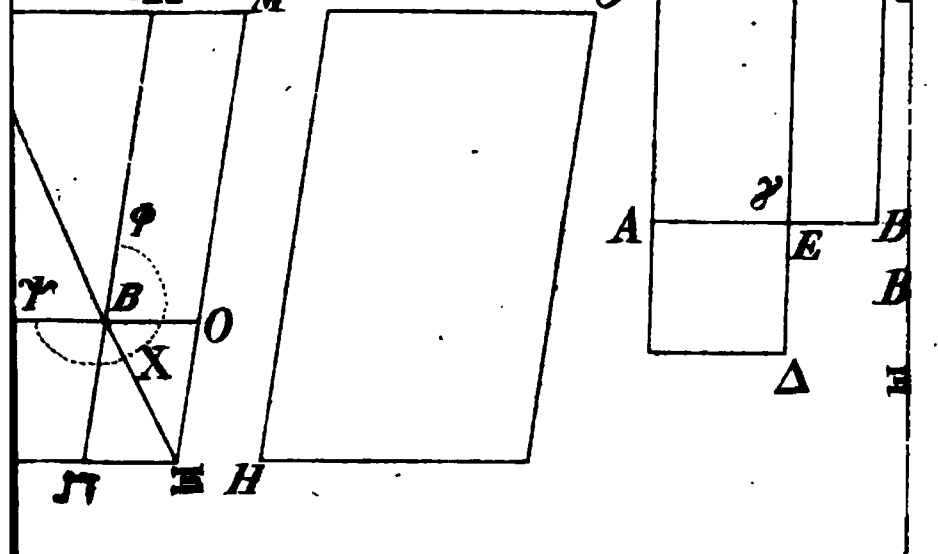
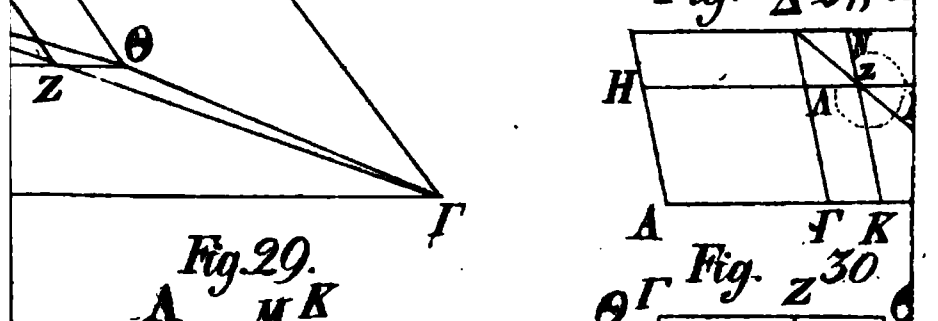
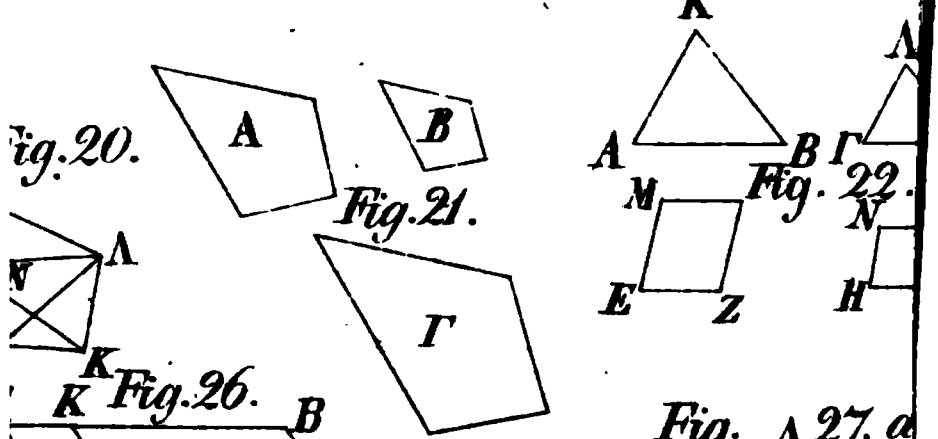
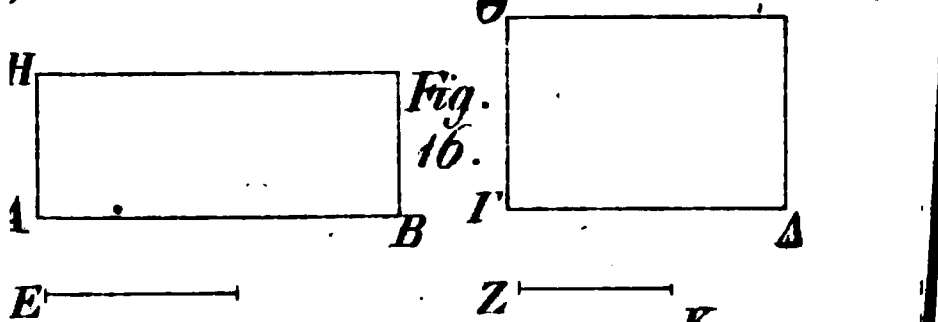
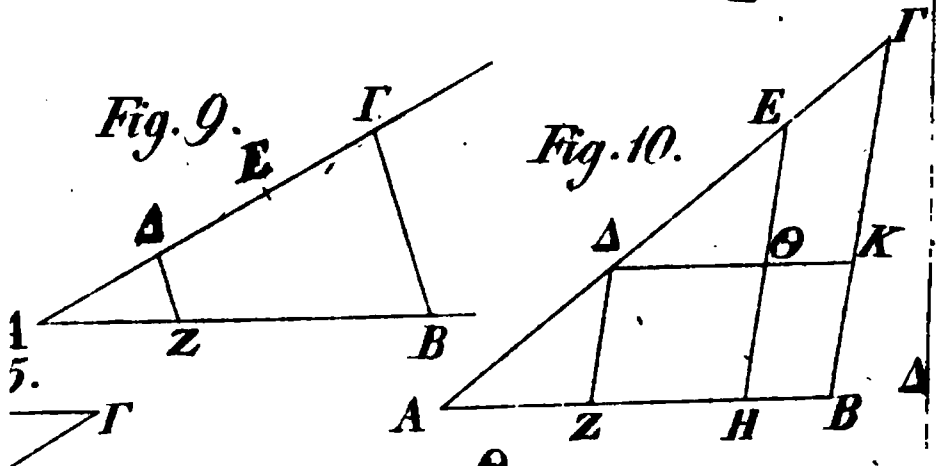
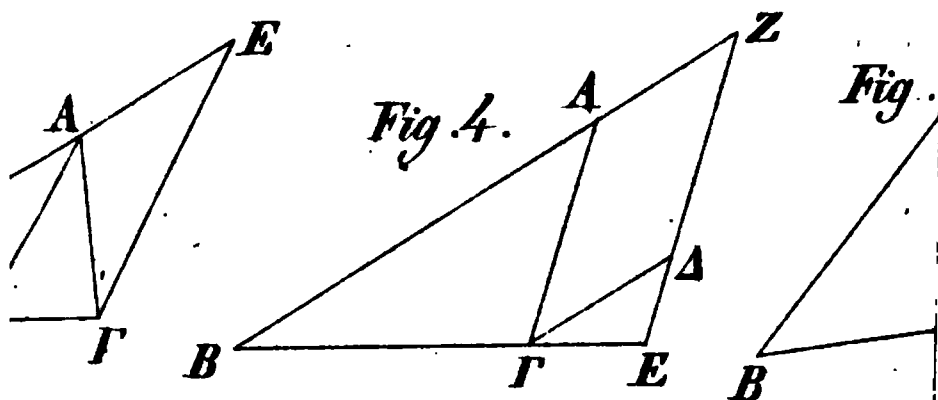


et quibus Elementorum pertinentes.

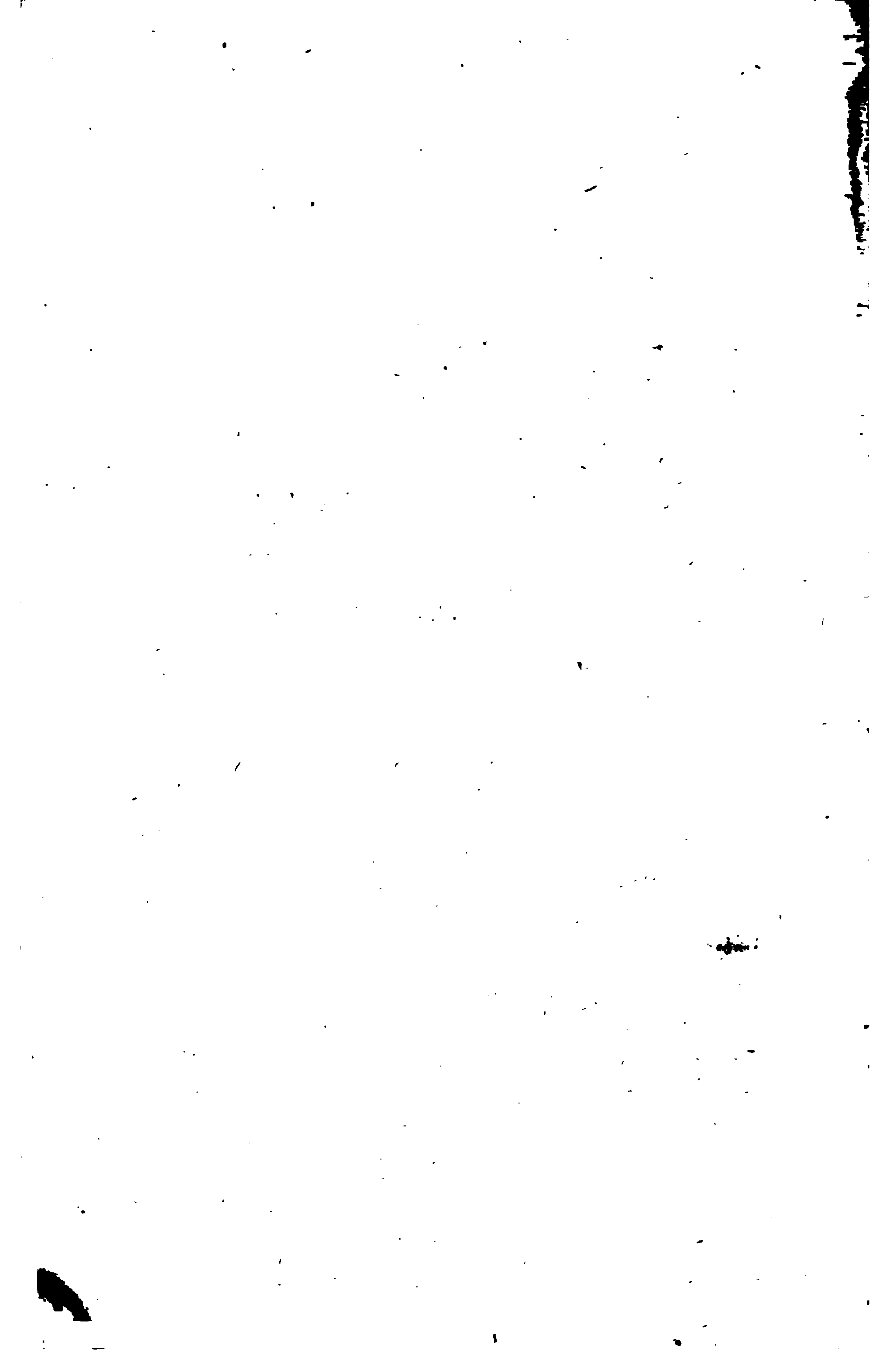
Fig. 4. Fig. 5. a. Fig. 6.











3.

B. 30. Γ. 12. 6) A. 36. B  
 . 6. E\_ Δ. 6... Z..... Δ

8.

. Z A..... E.... B  
 Γ..... K..... N.. Θ Δ

11.

..... E... B  
 .... Z... Δ

13.

1) B. 15. Γ. 7. (28) Δ. 35.

20.

Γ. 9. A. 7. E A. 4. B. 6. Γ. 9.  
 E. 27. Δ. 35. L Δ. 6.

25.

8. A. 24. B. 35.  
 T. 6 Δ\_

28.

A. 7. E. 112. B. 16.  
 T. 15. Z. 195. Δ. 13.

35.

Γ. 120. a) A. 24. A. 4. B. 7. Γ. 9.  
 B. 3. A. 24. B. 84. Γ. 60.  
 E. 2. Z. 7. H. 5.  
 2. Θ\_ K\_ A\_

38.

a) A. 6... Δ. 42. b) A. 6 1 1/2 B 1/2 Γ 1/2 H. 12.  
 B. 14. E\_ B. 14 1/2 Δ. 2. E. 3. Z. 4. Θ\_  
 Γ. 21. Γ. 15.

41.

Δ. 27. a) A. Γ. 2. Δ. 3. E. 4. Z. 3.  
 10. K. 15.  
 40. M. 60. O. 45.  
 Σ\_ T\_

40





